ANALIZA PARAMETRYCZNA DWUWARSTWOWYCH KRATOWNIC TYPU TENSEGRITY – MODEL DYSKRETNY I KONTYNUALNY

mgr inż. Justyna Tomasik

Kielce, 2023

Dziękuję mojej Pani Promotor Profesor Paulinie Obarze
za wskazanie kierunku badań, opiekę merytoryczną, poświęcony czas
i zaangażowanie

Dziękuję również Tomaszowi i Pacierzowi za wsparcie i wszelką pomoc przy
pisaniu rozprawy

SPIS TREŚCI

ROZDZIAŁ 1.

WSTĘP

1.1. Przedmiot rozważań

Tensegrity to termin wywodzący się z języka angielskiego, łączący ze sobą słowa *tension* – rozciąganie i *integrity* – stabilność. Idea struktury tensegrity wywodzi się ze świata sztuki, jednakże dzięki swoim wyjątkowym właściwościom, tensegrity obecne są również w wielu dziedzinach nauki i inżynierii. W kontekście architektury i budownictwa, tensegrity odnosi się do systemów konstrukcyjnych, które byłyby mechanizmami, gdyby nie występowanie samorównoważnych układów sił wewnętrznych, zwanych także stanem samonaprężenia. Stan samonaprężenia zapewnia stabilność konstrukcji, a istniejący mechanizm staje się infinitezymalny (nieskończenie mały) i opisuje jedynie lokalną zmienność geometryczną. Konstrukcje tensegrity składają się wyłącznie z elementów ściskanych (zastrzałów), które nie łączą się ze sobą, oraz elementów rozciąganych (cięgien), które tworzą ciągły układ otaczający zastrzały. Ze względu na występowanie wspomnianych wcześniej cech, stanów samonaprężenia i mechanizmów, struktury tensegrity różnią się od konwencjonalnych konstrukcji prętowo cięgnowych.

Poza podanym wyżej opisem odnoszącym się do zastosowania idei tensegrity w budownictwie i architekturze, tensegrity można uznać za generalną zasadę, którą tłumaczyć można funkcjonowanie otaczającego nas świata. Ściskanie i rozciąganie może być w szerszym zakresie rozumiane jako odpychanie i przyciąganie się ciał, dzięki czemu tensegrity może być uznane za uniwersalną zasadę rządzącą wszechświatem. Koncepcja stabilności i równowagi pomiędzy ściskaniem i rozciąganiem tłumaczyć może zachowanie rzeczy błahych (rozciąganie się balona pod wpływem wtłaczanego do wewnątrz ściskanego powietrza), jak i tych bardziej skomplikowanych (oddziaływania grawitacyjne pomiędzy planetami czy budowa atomu).

Struktury tensegrity składają się z najprostszych typów elementów (cięgna i zastrzały), jednakże ich geometria i nietypowe właściwości utrudniają wykorzystanie tej idei w praktyce inżynierskiej. Bezpośrednią motywacją do podjęcia tematyki tensegrity jest chęć przybliżenia zasady pracy struktur tensegrity poprzez przedstawienie licznych przykładów obrazujących zachowanie się tych konstrukcji pod wpływem obciążenia statycznego. W pracy zastosowano dwa podejścia do modelowania struktur tensegrity: ujęcie dyskretne i kontynualne. W znanej autorce literaturze brak jest walidacji modelu kontynualnego płytowych konstrukcji tensegrity charakteryzujących się istnieniem mechanizmów. Niniejsza praca rozwija wcześniejsze badania i sprawdza celowość stosowania podejścia kontynualnego. W pracy rozpatrzono szerokie spektrum konstrukcji w podejściu dyskretnym, które stanowi bazę do walidacji podejścia kontynualnego. Autorka planuje kontynuować analizę tego zagadnienia w kolejnych etapach pracy naukowej.

1.2. Cel, zakres, założenia

Zasadniczym celem pracy jest statyczna analiza parametryczna dwuwarstwowych kratownic typu tensegrity z wykorzystaniem podejścia dyskretnego i kontynualnego. Do realizacji tego zadania konieczne było:

- zbudowanie nieliniowego modelu matematycznego uwzględniającego stan samonaprężenia,
- przeprowadzenie oceny jakościowej polegającej na identyfikacji immanentnych cech struktur tensegrity, tj. stanów samonaprężenia (wstępnego sprężenia) i mechanizmów infinitezymalnych,
- przeprowadzenie oceny ilościowej polegającej na zadaniu zachowania się struktur tensegrity pod wpływem oddziaływania obciążeń zewnętrznych niezmieniających się w czasie, w tym:
    - określenie minimalnego i maksymalnego poziomu wstępnego sprężenia,
    - ocena wpływu wstępnego sprężenia na przemieszczenia,
    - ocena wpływu wstępnego sprężenia na nośność konstrukcji,
    - ocena sztywności konstrukcji,
- zbudowanie modelu kontynualnego uwzględniającego wpływ wstępnego sprężenia oraz weryfikacja tego podejścia poprzez sprawdzenie zachowania się konstrukcji pod wpływem obciążeń przy wykorzystaniu sześcioparametrowej teorii powłok oraz porównanie uzyskanych rezultatów z wynikami otrzymanymi w ujęciu dyskretnym.

W pracy przyjęto następujące założenia:

- materiał, z którego wykonane są konstrukcje jest ciągły, jednorodny i izotropowy,
- równania konstytutywne są liniowe,
- struktury są zbudowane z elementów tylko rozciąganych (cięgien) i tylko ściskanych (zastrzałów),
- wszystkie elementy są prostoliniowe i są porównywalnej długości,
- struktury są wstępnie sprężone, a to oznacza, że żadne cięgno nie jest luźne (pominięto wpływ zwisu na efektywny moduł sprężystości),
- elementy rozciągane tworzą ciągły układ, natomiast elementy ściskane nie łączą się, co oznacza, że nie są narażone na duże obciążenia wyboczeniowe,
- węzły są idealnymi przegubami kulistymi,
- więzy podporowe są ustalone, skleronomiczne,
- obciążenia są konserwatywne, zachowawcze (potencjalne),
- możliwe są duże gradienty przemieszczeń.

1.3. Układ pracy

Praca została podzielona na siedem rozdziałów. **Rozdział 1** jest wprowadzeniem do dalszej części rozprawy. Opisano w nim przedmiot rozważań, przedstawiono cel, zakres, założenia rozprawy oraz układ pracy.

Rozdział 2 zawiera wprowadzenie do tematyki struktur tensegrity. Rozdział rozpoczyna się krótkim opisem początków powstania idei tensegrity i związanych z tym kontrowersji. Przybliżono możliwość wykorzystania tensegrity w różnych dziedzinach nauki i sztuki. Przedstawiono podstawowe moduły tensegrity, służące do budowy bardziej skomplikowanych konstrukcji, m. in. dwuwarstwowych kratownic tensegrity, zwanych także płytami tensegrity. Główną część rozdziału stanowi przegląd literatury dotyczącej płyt tensegrity.

Rozdział 3 dotyczy immamentnych cech struktur tensegrity, tj. występowania stanów samonaprężenia i mechanizmów infinitezymalnych. Cechy te odróżniają struktury tensegrity od konwencjonalnych konstrukcji cięgnowo-prętowych. Przedstawiono różne definicje i związaną z istnieniem mnogości opisów tych struktur niejednoznaczność stosowania pojęcia tensegrity. Uzasadniono, dlaczego w pracy zastosowano analizę spektralną macierzy kratownic, wyjaśniono czym odróżnia się to podejście od innych metod *form-finding* i jak należy je zastosować do identyfikacji stanów samonaprężenia i mechanizmów. Zaproponowano klasyfikację struktur tensegrity na podstawie występowania sześciu cech charakterystycznych. Na koniec rozdziału rozpatrzono przykłady płaskich konstrukcji, dla których można przedstawić w sposób jawny tok postępowania.

Rozdział 4 zawiera matematyczny opis struktur tensegrity w ujęciu dyskretnym i kontynualnym. W pierwszej kolejności przedstawiono geometrycznie nieliniowy model dyskretny w ujęciu metody elementów skończonych. Wyprowadzono równania równowagi statycznej pojedynczego elementu skończonego i całej struktury. Następnie przedstawiono opis sześcioparametrowej teorii powłok, która została zastosowana do analizy ortotropowego modelu kontynualnego. Rozdział kończy opis modelu kontynualnego. Zastosowanie tego podejścia wymaga wyznaczenia ekwiwalentnej macierzy sprężystości, opisano więc procedurę wyprowadzenia zastępczych charakterystyk materiałowych, opartą na czterech transformacjach macierzowych.

Rozdział 5 zawiera analizę jakościową struktur tensegrity. Rozpatrzono zachowanie pojedynczych modułów i płyt tensegrity zbudowanych z tych modułów. Wykorzystano analizę spektralną macierzy kratownic i dokonano kwalifikacji konstrukcji do zdefiniowanych w rozdziale 3 grup.

Rozdział 6 zawiera analizę ilościową struktur tensegrity, ze szczególnym uwzględnieniem wpływu poziomu stanu samonaprężenia na przemieszczenia oraz sztywność i nośność konstrukcji. Ocenę ilościową, obejmującą obliczenia odpowiedzi konstrukcji na działanie obciążeń statycznych, wykonano stosując analizę quasi-liniową (teoria II rzędu) i nieliniową (teoria III rzędu). Rozpatrzono wybrane konstrukcje omówione w rozdziale piątym.

Rozdział 7 dotyczy analizy ilościowej w podejściu kontynualnym. W celu walidacji zaproponowanego podejścia, rozpatrzono najpierw konstrukcję niebędącą tensegrity, a następnie rozważono płytę i pasmo płytowe zbudowane z modułu *modified Quartex.*

Rozdział 8 stanowi podsumowanie rozprawy z przedstawieniem najważniejszych wniosków.

Na końcu pracy zamieszczono wykaz literatury oraz streszczenie pracy w języku polskim i angielskim.

ROZDZIAŁ 2.

DWUWARSTWOWE KRATOWNICE TYPU TENSEGRITY

2.1. Wprowadzenie

Tensegrity są ciekawym przykładem idei, która przeniknęła ze świata sztuki do świata nauki. Koncepcja ta powstała w nurcie konstruktywizmu – kierunku artystycznego, powstałego w Rosji w 1913 roku. W opozycji do pozostałych kierunków awangardowych, w konstruktywizmie forma dzieła ograniczona była do zastosowania prostych elementów geometrycznych, tj. koła, trójkąta i prostej linii. Zastosowanie w strukturach elementów przenoszących jedynie siły ściskające i rozciągające umożliwiło aplikację idei tensegrity w architekturze i budownictwie. Prostota elementów systemów tensegrity pozwala na utworzenie nowatorskich i innowacyjnych form architektonicznych projektowanych obiektów. Geometryczna forma tensegrity jest ściśle powiązana z uzyskaniem odpowiedniego układu sił w konstrukcji, pozwalając tym systemom zachowywać stabilność przy możliwie jak najmniejszej liczbie stosowanych elementów.

Zagadnienia powiązane z analizą zachowania się ustrojów tensegrity są bardziej skomplikowane niż w przypadku tradycyjnych systemów konstrukcyjnych. Rozwój komputerowych technik wspomagania projektowania w ostatnich latach przyczynia się jednakże do coraz większego zainteresowania strukturami tymi strukturami.

2.2. Zarys historyczny

Początki idei tensegrity datuje się na lata 60. XX wieku, kiedy zgłoszone zostały trzy patenty opisujące konstrukcję złożoną z trzech elementów ściskanych (zastrzałów, prętów) i dziewięciu elementów rozciąganych (cięgien), tzw. moduł *Simplex.* Autorów tych patentów, tj. Richarda Buckminstera Fullera (1895-1983), Davida Georgesa Emmericha (1925-1996) i Kennetha D. Snelsona (1927-2016), uznaje się za twórców tensegrity, chociaż już w latach 20-tych XX wieku powstały pierwsze struktury nazwane proto-tensegrity. Ich autorem był łotewski konstruktywista Karl Ioganson (1890-1929), który w 1921 roku, podczas wystawy w Moskwie, zaprezentował instalację *Gleichgewichtkonstruction* (*Gleichgewicht* – równowaga, *konstruktion* –

konstrukcja). Struktura ta była w pełni deformowalna i składała się z trzech zastrzałów, siedmiu cięgien napiętych oraz jednego swobodnie zwisającego (rys. 2.1a). W pracy [Gough, 1998; Railing i Gough, 2007] opisano rozwój instalacji Ioagansona, który doprowadził do utworzenia rzeźby przypominającej najprostszy moduł tensegrity – *Simplex* (rys. 2.1b). Twórczość Ioagansona polegała na poszukiwaniach nowych form konstrukcyjnych i choć nigdy nie zastosował on swoich wizji do realizacji konstrukcji inżynierskich – nie przeszedł *„(...) od rzeźby do konstrukcji (...)”*– to zainspirował kolejnych badaczy i twórców.

a) b)

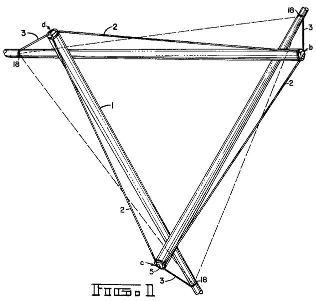
Rys. 2.1. Instalacje Ioagansona: a) *Gleichgewichtkonstruktion* [Motro, 2003], b) moduł *Simplex* [Attig *i in.*, 2016]

Z kolejnym etapem rozwoju struktur tensegrity wiąże się pewna kontrowersja, spowodowana sporem pomiędzy Richardem Buckminsterem Fullerem oraz Kennethem Snelsonem. W 1948 roku Fuller, architekt, inżynier, matematyk, wynalazca, kosmolog i poeta, został profesorem w Black Mountain College w Północnej Karolinie. Jednym ze studentów uczęszczającym na prowadzone przez Fullera wykłady, dotyczące modeli geometrycznych, był Kenneth Snelson. Zainspirowany wizją swojego profesora zbudował on instalację, uznawaną za pierwszą strukturę tensegrity. Struktura ta urealniła pomysły Fullera: *„Przez dwadzieścia lat, zanim spotkałem Kennetha Snelsona, zajmowałem się koncepcjami tensegrity (...). Pomimo to, (...) nie potrafiłem ich połączyć i stworzyć cztero-, pięcio- i sześcioosiowej symetrycznej struktury Tensegrity”* [Fuller, 1961]. Początkowo, Fuller akceptował Snelsona jako współautora odkrycia, ale stopniowo zaczął pomijać osiągnięcia swojego studenta. Jedną ze strategii „zagarnięcia” dla siebie sukcesu przez Fullera było utworzenie przez niego w 1955 roku terminu *tensegrity*, będącego połączeniem słów *tension* (rozciąganie) i *integrity (*integralność, jedność). W 1962 roku Fuller [Fuller, 1962] jako pierwszy zgłosił patent dotyczący systemu tensegrity (rys. 2.2a), chociaż, jak sam twierdził w liście do Snelsona w 1980 roku, tensegrity nie jest wynalazkiem, lecz odkryciem, a *„wynalazcy nie mogą odkryć ani uzyskiwać patentów na odwieczne zasady rządzące Wszechświatem”* [Vesna, 2000]. Trzy lata później, w 1965 roku, Snelson także opatentował swoje odkrycie (rys. 2.2b) [Snelson, 1965].

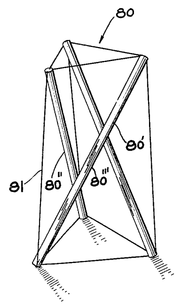
Niezależnie od wymienionych powyżej Amerykanów, w 1964 roku patent opisujący dokładnie tę samą konstrukcję (rys. 2.2c) zgłosił David Emmerich [Emmerich, 1964a, b].

W kolejnych latach wszyscy trzej wymienieni naukowcy rozwijali ideę tensegrity – Fuller (rys. 2.3) i Emmerich (rys. 2.4) proponowali wykorzystywanie tensegrity w architekturze, natomiast Snelson (rys. 2.5) jest znany z zastosowań tensegrity w twórczości artystycznej.

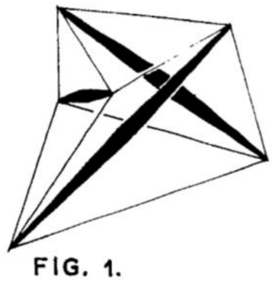
a)



b)



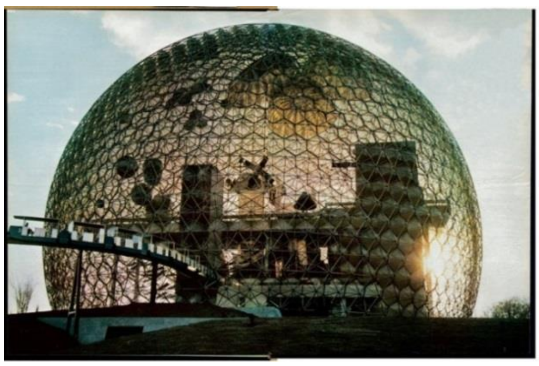
c)



Rys. 2.2. Moduł *Simplex* w patencie: a) Fullera [Fuller, 1962], b) Snelsona [Snelson, 1965] , c) Emmericha [Emmerich, 1964a]

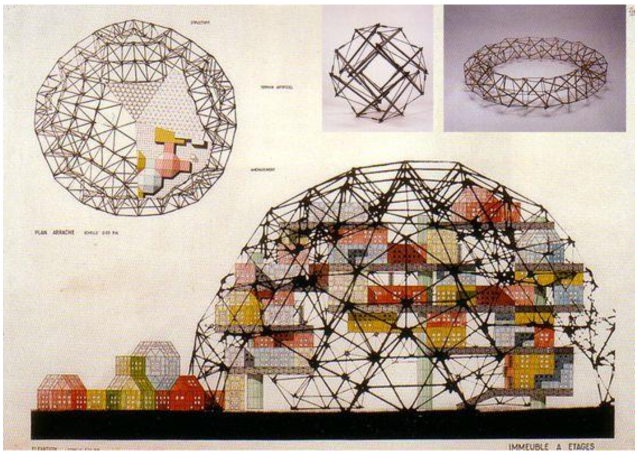
a)

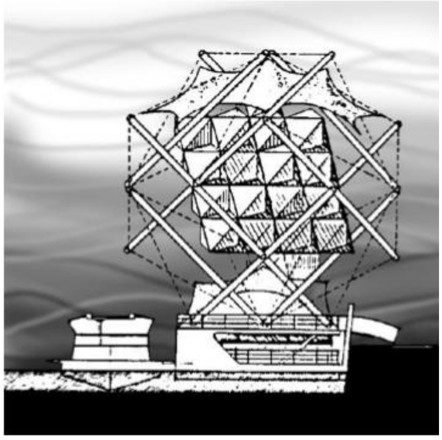
b)



Rys. 2.3. Konstrukcje Buckminstera Fullera, a) *Montreal Biosphere*, 1967 [https://www.viator.com/Montreal-attractions/Montreal-Biosphere/d625-a957], b) *U.S. Pavillon*, 1967 [https://planosmodernos.info/definicion-de-estructura/]

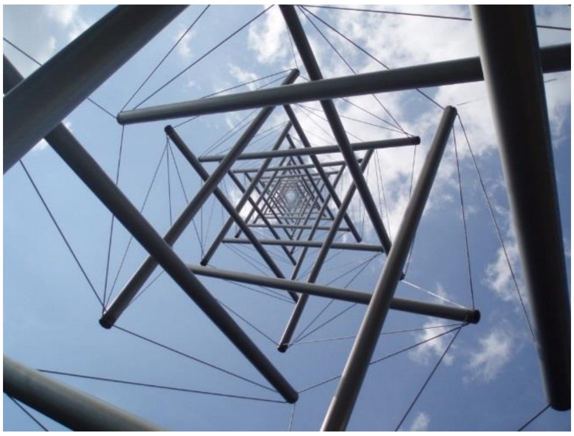
a) b)





Rys. 2.4. Koncepcje Davida Georgesa Emmericha: a) *Urban Tensegrity*, 1958 [https://i.pinimg.com/236x/50/c6/11/50c611a5f00ec30056953388722e49cd-architecture-drawings-megastructures.jpg], b) hotel [Raducano, 2001]

a) b)



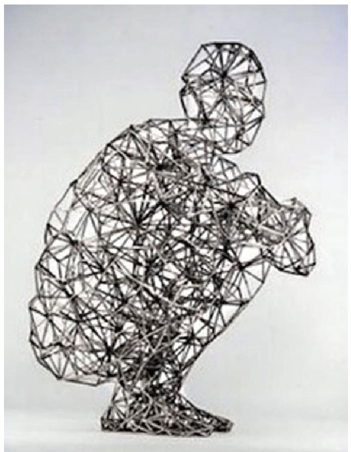
Rys. 2.5. Rzeźby Kennetha Snelsona, a) *Needle Tower*, 1969 [https://pl.wikipedia.org/wiki/Plik:Kenneth_Snelson_Needle_Tower.JPG], b) *Dragon*, 2003 [https://pinwheel.center/Projects/dragon/]

Obecnie struktury tensegrity są stosowane w sztuce (rys. 2.6a), matematyce, medycynie (rys. 2.6b) i inżynierii (rys. 2.6c). W ostatnich latach można również zaobserwować wzmożone zainteresowanie wykorzystaniem tej idei w inżynierii budowlanej, w tym w zastosowaniu standardowym, jak i niestandardowym. Przez standardowe zastosowanie rozumie się aplikację tych struktur w dwuwarstwowych kratownicach, kopułach, wieżach, masztach, kładkach i mostach. Wśród zastosowań niestandardowych należy wymienić natomiast konstrukcje inteligentne oraz tzw.

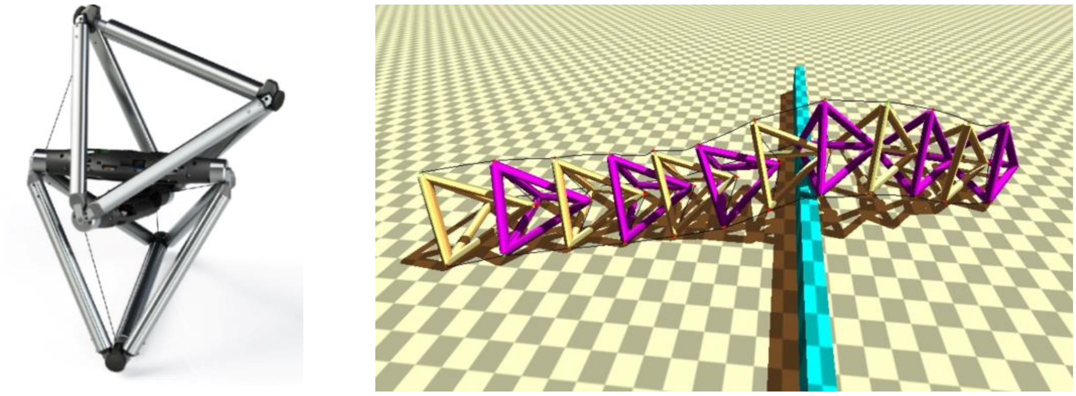
metamateriały. Do konstrukcji inteligentnych zalicza się te struktury, które zdolne są do samoistnej adaptacji do panujących warunków otoczenia bez ingerencji dodatkowych systemów zewnętrznych. Do najważniejszych cech konstrukcji inteligentnych zalicza się zdolności do aktywniej kontroli, samosterowania, samodiagnozy i samonaprawy. Natomiast metamateriały (z gr. *meta* – ponad, poza) są materiałami zaprojektowanymi i stworzonymi przez człowieka, niewystępującymi naturalnie w przyrodzie. Własności metamateriału zależą głównie od jego struktury w skali większej niż cząsteczkowa, a nie jedynie od jego składu chemicznego czy fazowego.

a)

b)



c)



Rys. 2.6. Zastosowania tensegrity: a) stołki [https://www.designboom.com/readers/sam-weller-snelson-stool/] b) model tkanki powięziowej [Bordoni *i in.*, 2018], c) Ductt, robot służący do czyszczenia kanałów wentylacyjnych [https://www.technology.org/2015/10/21/tensegrity-robot-clean-explore-ducts/]

W pracy, w sposób szczegółowy zostanie omówione zastosowanie struktur tensegrity do budowy dwuwarstwowych kratownic, natomiast przykłady innych zastosowań można odnaleźć m. in. w następujących pracach:

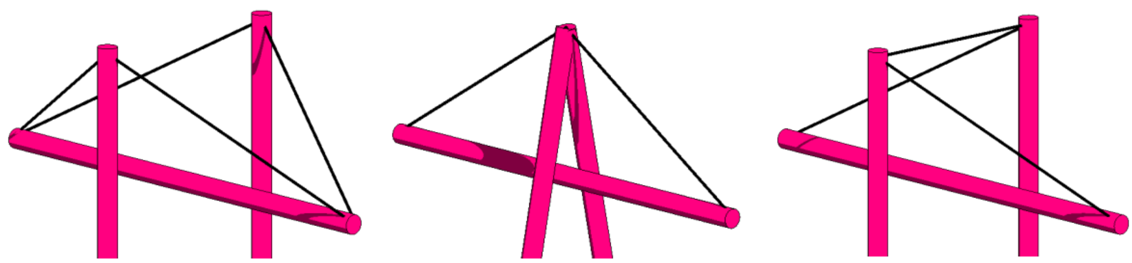
- kopuły – [Geiger, 1988; Rastorfer, 1988; Levy, 1991; Castro i Levy, 1992; Melaragno, 1991, 1993; Pellegrino, 1992; Terry, 1994; Zalewski i Allen, 1998; Kawaguchi i Lu, 2004; Kawaguchi i Ohya, 2009; Biondini *i in.*, 2011; Allen i Zalewski, 2012; Malerba *i in.*, 2012; Chen i Feng, 2012; Lee *i in.*, 2013; Pelczarski, 2013; Attig *i in.*, 2017; Gilewski *i in.*, 2016; Zhang i Feng, 2016; Zhang *i in.*, 2018a; Kłosowska, 2018; Ma *i in.*, 2021; Obara *i in.*, 2023],
- wieże i maszty – [Micheletti, 2003; Sultan i Skelton, 2003; Schlaich, 2004; Masic i Skelton, 2004; Xian i Luo, 2010; Snelson, 2013; Safaei *i in.*, 2013; Skelton i Oliveira, 2010; Ashwear *i in.*, 2016; Kan *i in.*, 2018; Lee i Choong, 2018; Małyszko i Rutkiewicz, 2019; Al Sabouni-Zawadzka i Zawadzki, 2020a, b],
- mosty i kładki – [Bel Hadj Ali, 2009; Korkmaz *i in.*, 2010, 2011; Rhode-Barbarigos *i in.*, 2010a, 2009, 2010b, 2012a, b; Bel Hadj Ali *i in.*, 2010; Gilewski i Kasprzak, 2011; Micheletti, 2012; Skelton *i in.*, 2013; Woźniak, 2013; Kasprzak, 2014; Metodieva, 2014; Fraternali *i in.*, 2016; Al Sabouni-Zawadzka, 2016; Ben Kahla *i in.*, 2020],
- konstrukcje inteligentne – [Fest Etienne *i in.*, 2003; Domer *i in.*, 2003; Fest Etienne *i in.*, 2004; Domer i Smith, 2005; Adam i Smith, 2006, 2007a, b, 2008; Smith, 2009; Al Sabouni-Zawadzka i Gilewski, 2014a; Zawadzki *i in.*, 2014; Gilewski i Al Sabouni-Zawadzka, 2014; Al Sabouni-Zawadzka, 2014, 2016; Peng *i in.*, 2020; Wang *i in.*, 2021c; Goyal *i in.*, 2021],
- metamateriały – [Fraternali *i in.*, 2016; Fraddosio *i in.*, 2017; Fabbrocino i Carpentieri, 2017; Al Sabouni-Zawadzka i Gilewski, 2018a, b, 2019; Zhang *i in.*, 2018b, b; Wang *i in.*, 2018; Vangelatos *i in.*, 2020b, a; Yin *i in.*, 2020a, b; Lee *i in.*, 2020; Wen *i in.*, 2020; Verma *i in.*, 2022; Al Sabouni-Zawadzka, 2023].

2.3. Wzory strukturalne i podstawowe moduły tensegrity

Wzory strukturalne form tensegrity zostały po raz pierwszy skatalogowane przez Anthony’ego Pugha [Pugh, 1976]. Wyróżnił on trzy wzory: diamentowy (rombowy), obwodowy i zygzakowy (skośny). We wzorze diamentowym (rys. 2.7a) każdy zastrzał (różowa linia) stanowi dłuższą przekątną rombu, zbudowanego z cięgien (czarna linia), i zgiętego wzdłuż zastrzału. Przykładem modułu o wzorze diamentowym jest *expanded Octahedron* (rys. 2.8a) – moduł złożony z sześciu zastrzałów i dwudziestu czterech cięgien. Pozostałe dwa wzory są modyfikacją wzoru diamentowego. Wzór obwodowy (rys. 2.7b) powstaje przez połączenie krawędzi zgiętego rombu, w wyniku czego elementy ściskane tworzą zamknięty obwód. Moduł tensegrity o wzorze obwodowym można utworzyć na bazie sześcio-ośmiościanu (*Cuboctahedron)* zbudowanego z dwunastu zastrzałów, połączonych w cztery obwody, i dwudziestu czterech cięgien (rys. 2.8b). We wzorze zygzakowym (rys. 2.7c) dodaje się cięgna w miejscu krótszej przekątnej rombu i usuwa niektóre z krawędzi tak, aby utworzyły one kształt litery *Z*. Przykładem takiego modułu jest czworościan ścięty (*Truncated Tetrahedron*) – moduł złożony z sześciu zastrzałów i osiemnastu cięgien (rys. 2.8c).

Rozszerzoną wersję podziału Pugha można znaleźć w pracy [Motro, 2003]. René Motro wydzielił dodatkowo takie wzory jak: gwieździsty, cylindryczny i nieregularny. Wzór gwieździsty oparty jest na wzorze diamentowym i powstaje poprzez wstawienie pionowego zastrzału lub węzła w środku ciężkości modułu (rys. 2.8d). Wzór cylindryczny powstaje natomiast poprzez dodawanie kolejnych „warstw” do siatki systemu diamentowego (rys. 2.8e). Z kolei do systemów nieregularnych zaliczono wszystkie układy niezaliczające się do wyżej wymienionych. Przykładami struktur o nieregularnym wzorze są niektóre rzeźby Snelsona, m.in. przedstawiony na rysunku 2.5b *Dragon*.

a) b) c)



Rys. 2.7. Podstawowe wzory strukturalne tensegrity: a) diamentowy, b) obwodowy, c) zygzakowy

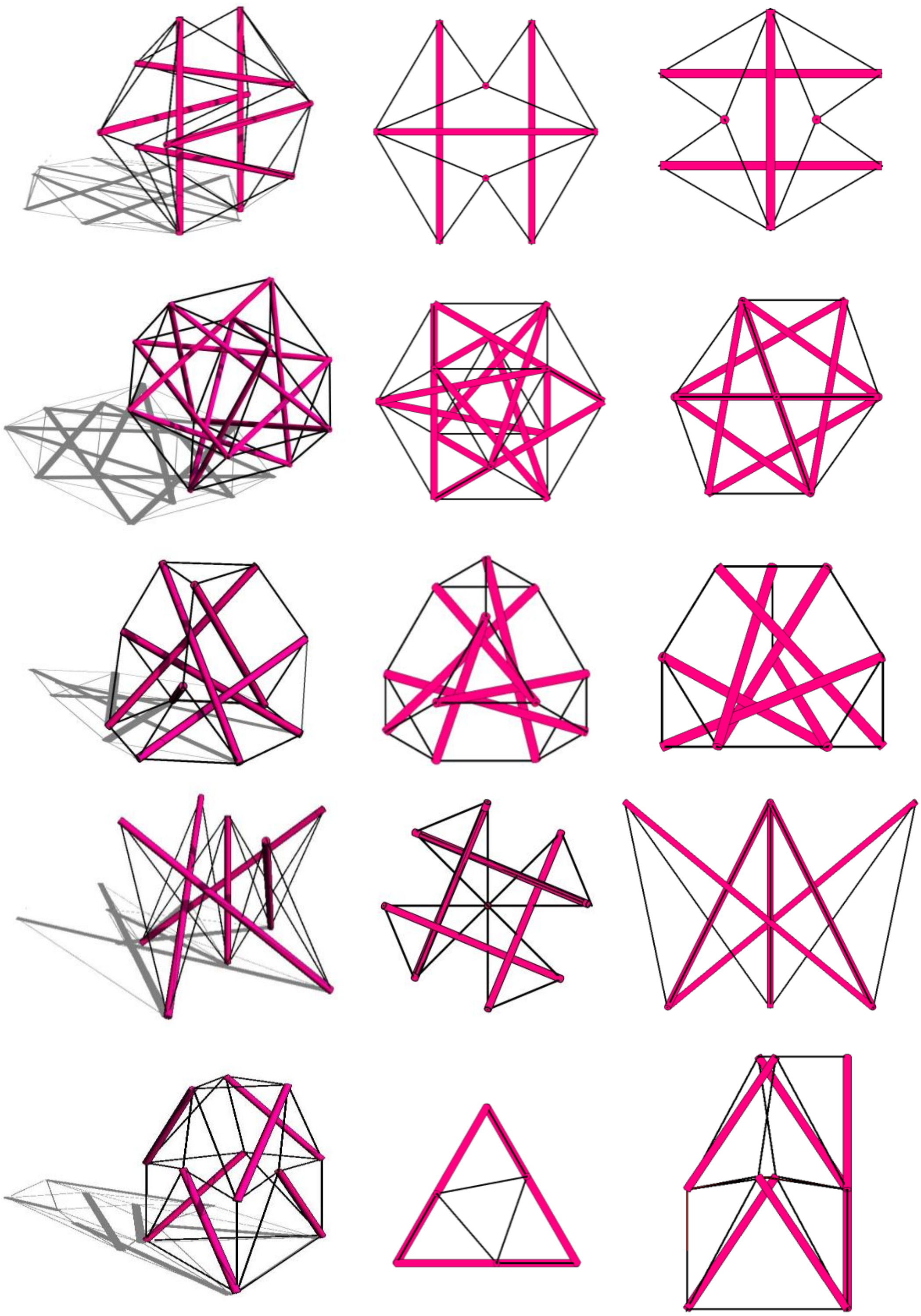
a)

b)

c)

d)

e)



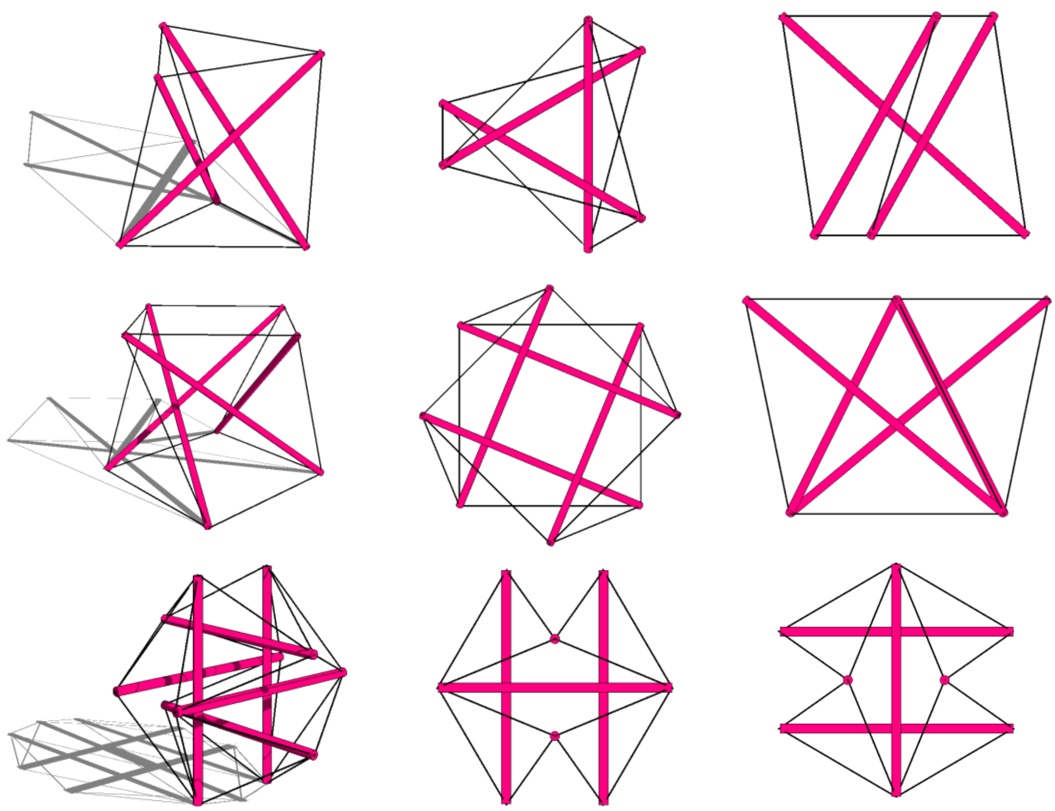
Rys. 2.8. Moduły struktur tensegrity o wzorze: a) diamentowym, b) obwodowym, c) zygzakowym, d) gwieździstym, e) cylindrycznym

Korzystając z przedstawionych powyżej sposobów tworzenia form tensegrity, można kształtować tzw. moduły tensegrity, czyli podstawowe powtarzalne jednostki tensegrity, z których można budować całe układy konstrukcyjne. Podstawowym modułem tensegrity jest, opatentowany przez Fullera, Emmericha i Snelsona, *Simplex* (rys. 2.9a). W literaturze moduł ten nazywany jest także *T3 prism* [Cretu, 2011] lub *simple three-bar tensegrity structure* [Rieffel *i in.*, 2023]. Moduł *Simplex* jest graniastosłupem prawidłowym o podstawie trójkątnej, zbudowanym z trzech zastrzałów i dziewięciu cięgien. Do bazowych modułów zaliczyć można także *Quartex* (rys. 2.9b) oraz *expanded Octahedron* (rys. 2.9c). Moduł *Quatrex* w literaturze występuje także pod nazwami *Quadruplex* [Faroughi i Lee, 2014a] lub *4-strut simplex* [Al Sabouni-Zawadzka i Gilewski, 2016] powstał na bazie graniastosłupa prawidłowego czworokątnego i składa się z czterech zastrzałów i dwunastu cięgien. Z kolei, moduł *expanded Octahedron* (rozszerzony ośmiościan) powstał przez modyfikację ośmiościanu foremnego i jest złożony z sześciu zastrzałów i dwudziestu czterech cięgien. Wymienione moduły, tj. *Simplex, Quartex* oraz *expanded Octahedron* powstały na bazie wzoru diamentowego. Do budowy konstrukcji stosuje się także zmodyfikowane moduły tensegrity, których geometria została tak przekształcona, aby rzut górnej płaszczyzny zamykał się w dolnej (rys. 2.10).

a)

b)

c)

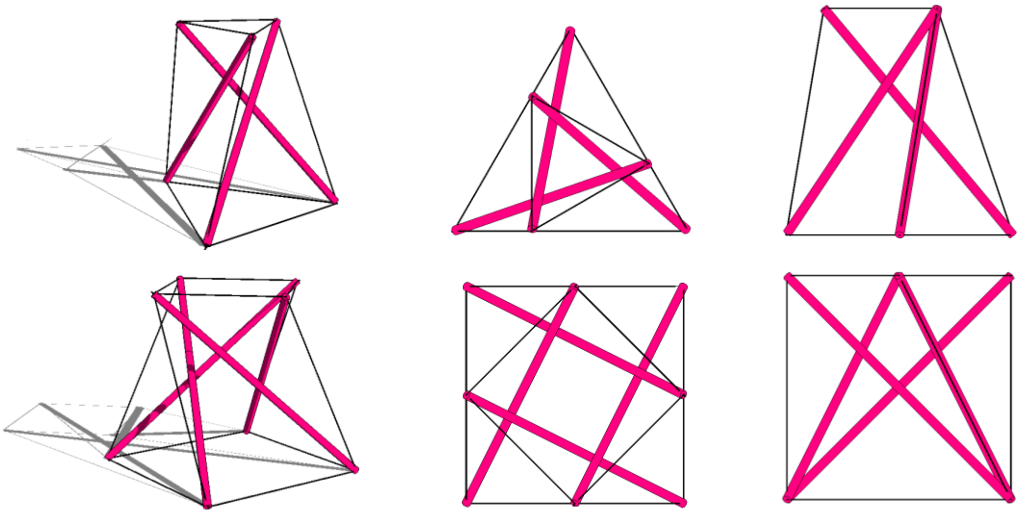


Rys. 2.9. Podstawowe moduły tensegrity: a) *Simplex*, b) *Quartex*, c) *expanded Octahedron*

Osobną grupę modułów tensegrity stanowią struktury powstałe na bazie ośmiościanu foremnego, m.in. *Octahedron 3z*[1] (rys. 2.11a) składający się z trzech zastrzałów i dwunastu cięgien i *Octahedron 5z* (rys. 2.11b) zbudowany z pięciu zastrzałów i ośmiu cięgien. *Octahedron 3z* i *Octahedron 5z* są strukturami, których nie można zakwalifikować do żadnego ze wzorów podanych przez Pugha i Motro.

a)

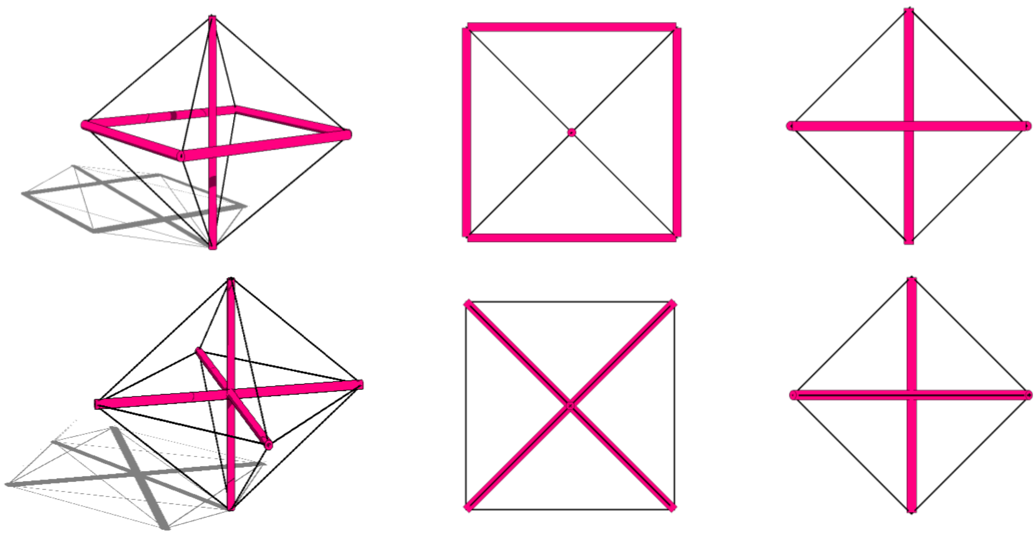
b)



Rys. 2.10. Zmodyfikowane moduły: a) *Simplex*, b) *Quartex*

a)

b)



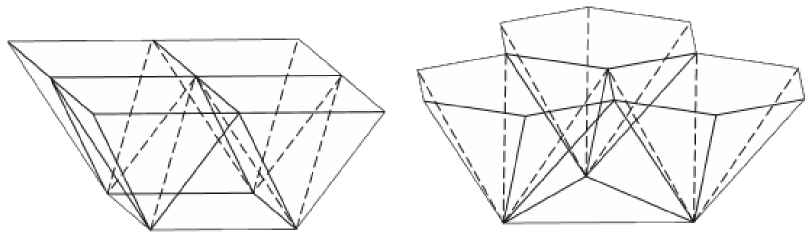
Rys. 2.11. Moduły powstałe na bazie ośmiościanu: a) *Octahedron 3z*, b) *Octahedron 5z*

[1] Nazwy odnoszą się do ilości zastrzałów w module [Obara, 2019a]

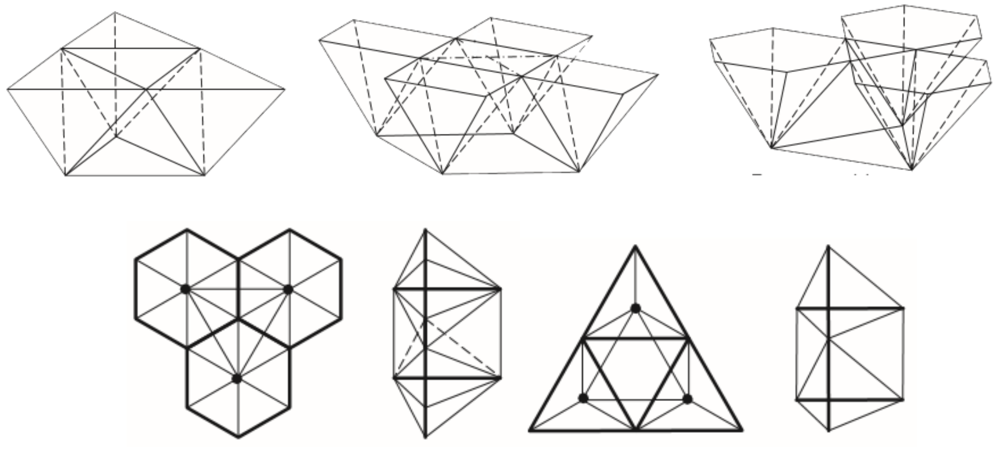
2.4. Przykłady płyt tensegrity w budownictwie

Jednym z zastosowań struktur tensegrity w budownictwie są przestrzenne dwuwarstwowe kratownice (*double-layer grids*), które z uwagi na budowę można nazywać płytami tensegrity. Konstrukcje te budowane są z pojedynczych modułów tensegrity, przy czym sąsiednie moduły mogą być łączone w sposób ciągły (*contiguous configuration*), tj. tak, że zastrzały są ze sobą połączone (rys. 2.12) lub nieciągły (*non-contiguous configuration*), czyli zachowując nieciągły układ elementów ściskanych (rys. 2.13). Z kolei, elementy modułów mogą być łączone w układach krawędź-krawędź (rys. 2.12a, rys. 2.13a), węzeł-węzeł (rys. 2.12b), bądź zastrzał-cięgno (rys. 2.13b). Generalnie, pręty dwuwarstwowych kratownic są zorganizowane w dwie równoległe płaszczyzny, które są połączone pionowymi i ukośnymi elementami. W rzucie poziomym pręty układają się w regularny wzór.

a)

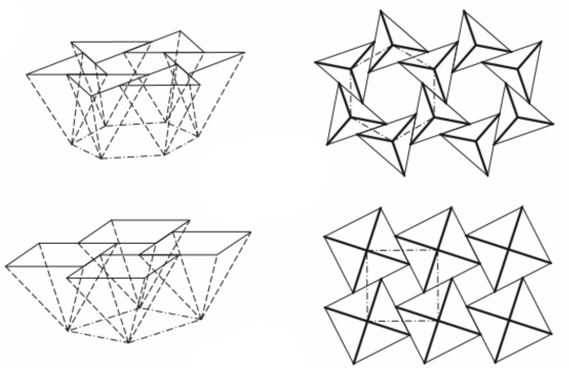


b)

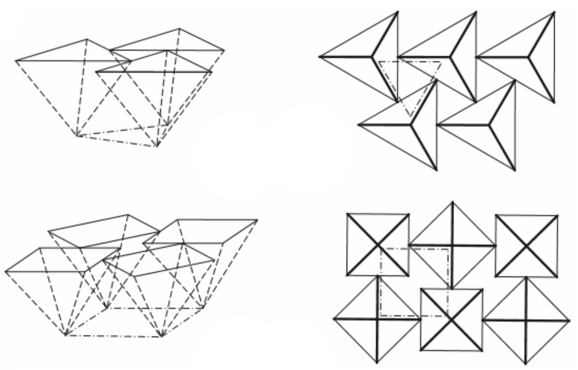


Rys. 2.12. Konfiguracje ciągłe modułów tensegrity: a) krawędź-krawędź, b) węzeł-węzeł [Wang, 2004]

a)



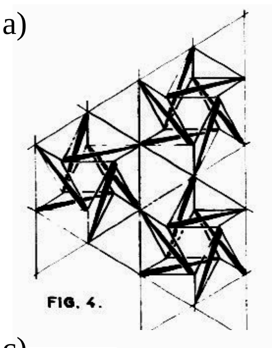
b)



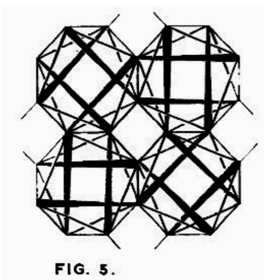
Rys. 2.13. Konfiguracje nieciągłe modułów tensegrity: a) krawędź-krawędź, b) zastrzał-cięgno [Wang, 2004]

Dwuwarstwowymi kratownicami tensegrity zajmowało się wielu badaczy, m.in. Emmerich, Kono i Kunieda, Skelton i Oliveira, Gomez-Jauregui, Olejnikova, Hanaor, Wang, Xu, Faroughi, Lee, Sulaiman, Parthasarathi, Geetha, Satyanarayanan, Motro, Raducanu, Averseng, Jamin, Quirant, Masic, Gill, Falk, Liapi, Kim, Liu, Fest, Shea, Smith, Diller, Scofidio i Papantoniou. Wśród polskich naukowców wymienić można Al Sabuoni-Zawadzką, Gilewskiego, Kłosowską, Obarę, Solovei, Małyszko oraz Rutkiewicza.

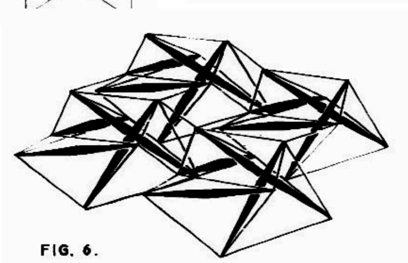
a)



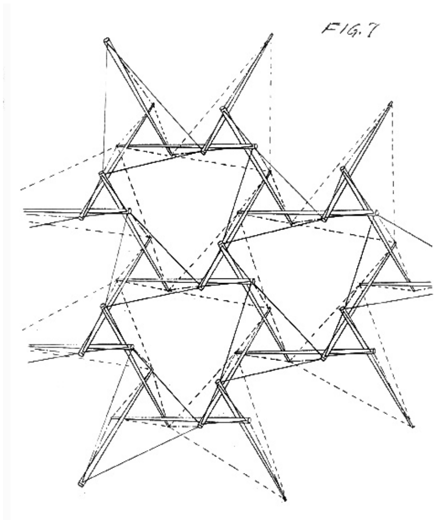
b)



c)



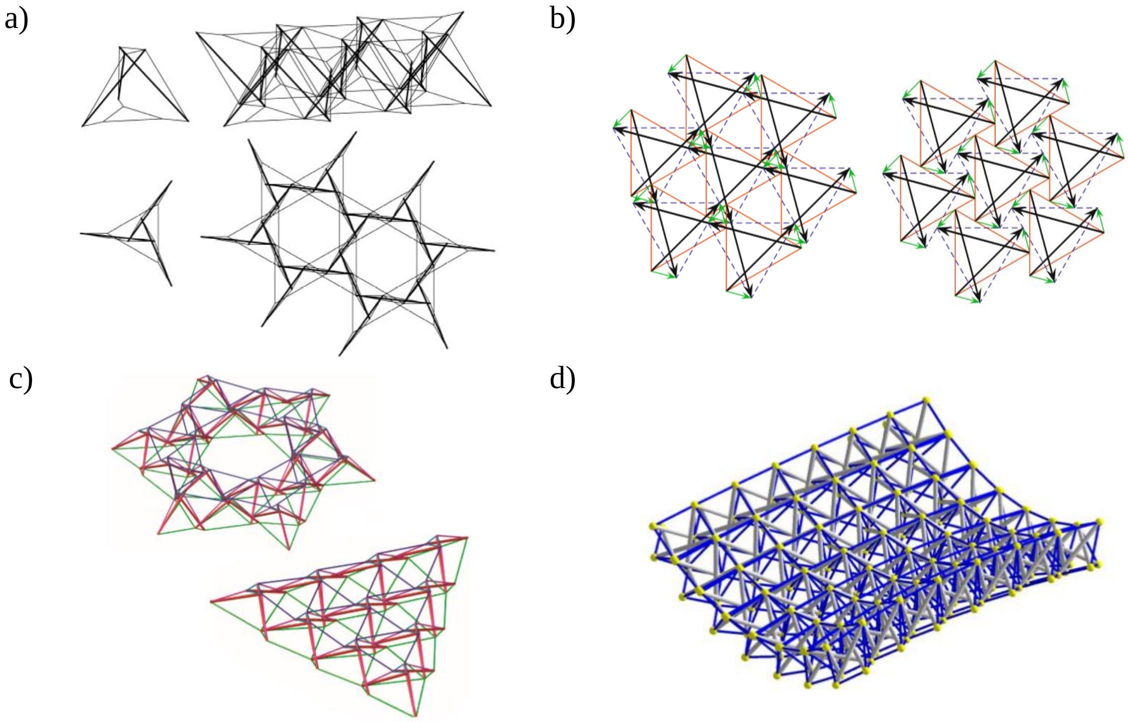
d)



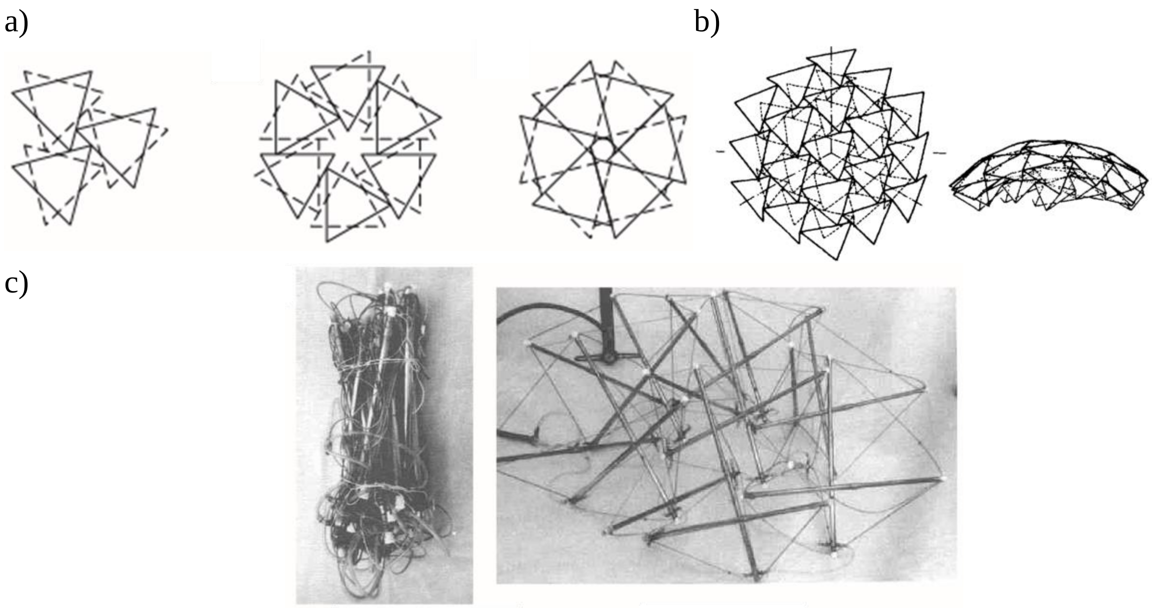
Rys. 2.14. Dwuwarstwowe kratownice tensegrity: a), b), c) konstrukcje Emmericha [Emmerich, 1964a, b], d) odrzucony patent Snelsona [http://bobwb.tripod.com/synergetics/photos/planar.html]

Pierwszymi dwuwarstwowymi kratownicami typu tensegrity są trzy konstrukcje Davida Emmericha, zawarte w patencie z 1964 roku [Emmerich, 1964a, b]. Pierwsza z nich składała się ze zmodyfikowanych modułów *Simplex* (*modified Simplex*) połączonych w systemie węzeł-węzeł i opisana była na siatce składającej się z równoramiennych trójkątów i sześciokątów (rys. 2.14a). Podobną konstrukcję można odnaleźć w odrzuconym patencie Snelsona (rys. 2.14d). Kolejne dwie struktury Emmericha (rys. 2.14b,c) łączone były w układzie krawędź-krawędź i składały się z modułów *Quartex.*

Oba wymienione powyżej moduły tj. *Simplex* i *Quartex* są obecnie najczęściej używane do budowy płyt tensegrity. Analizą płyt złożonych z modułów *Simplex* zajmowali się m.in. Kono i Kunieda, Skelton i Oliveira, Gomez-Jauregui z zespołem, Olejnikova oraz Hanaor. Zespół Kono i Kuniedy [Kono i Kunieda, 1996; Kono *i in.*, 1999] w 1996 roku utworzył pierwszy eksperymentalny model płyty (rys. 2.15a). Struktura składała się z trzydziestu trzech zmodyfikowanych modułów. Modyfikacja polegała na zmianie wzajemnych proporcji podstaw modułu i wprowadzeniu dodatkowych cięgien w większej podstawie. Moduły połączono tak, że dodatkowe cięgna są zarazem cięgnami mniejszej podstawy. Rozpiętość konstrukcji wynosiła 9 m, a jej powierzchnia – 80 m^2. Z kolei Skelton i Oliveira [Skelton i Oliveira, 2009] porównywali właściwości struktur powstałych z tych samych modułów, ale połączonych ze sobą w różny sposób (rys. 2.15b). Zespół Gomeza-Jauregui [Gomez-Jauregui *i in.*, 2012, 2013] zaproponował sposób otrzymywania płyt tensegrity na podstawie geometrii tradycyjnych dwuwarstwowych kratownic (rys. 2.15c), a Olejnikova [Olejnikova, 2012, 2014] badała konstrukcje z pojedynczą i podwójną krzywizną (rys. 2.15d). Dwuwarstwowymi strukturami tensegrity zajmował się również izraelski badacz Ariel Hanaor. W pracach [Hanaor, 1988, 1991, 1992, 1993, 1997, 2016] sprawdzał, jak łączyć podstawowe moduły tensegrity w celu uzyskania układów o dostatecznej sztywności i optymalnych pod względem masy (rys. 2.16a). W pracy [Hanaor, 1994] przedstawiono geometrycznie niezmienną dwuwarstwową kratownicę tensegrity. Struktura była zbudowana z modułów *Simplex* i zachowywała nieciągłość zastrzałów (rys. 2.16b). Z kolei w pracy [Hanaor, 1993] autor zaproponował zastosowanie płyt tensegrity jako konstrukcji tymczasowych (rys. 2.16c).



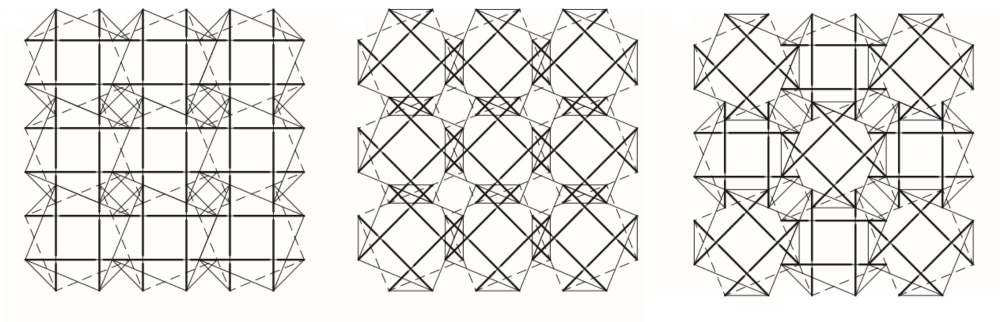
Rys. 2.15. Dwuwarstwowe kratownice tensegrity: a) patent Kono i Kunieda [Kono *i in.*, 1999], b) modele Skeltona i Oliveiry [Skelton i Oliveira, 2009], c) modele Gomeza-Jauregui [Gomez-Jauregui *i in.*, 2012], d) model Olejnikovej [Olejnikova, 2012]



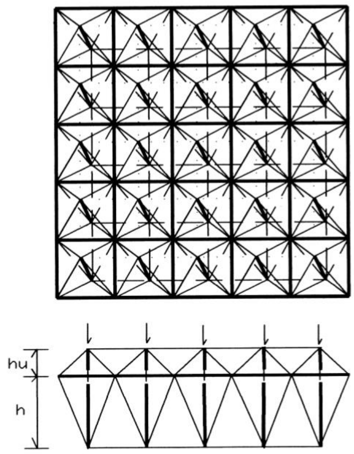
Rys. 2.16. Prace Hanaora: a) sposoby łączenia modułów [Hanaor, 1992], b) propozycja konstrukcji geometrycznie sztywnej [Hanaor, 1994], c) model eksperymentalny konstrukcji tymczasowej [Hanaor, 1993]

Autorem wielu ciekawych koncepcji dwuwarstwowych kratownic jest Wang. W pracy [Wang, 2004] zaproponował m.in. struktury złożone z modułów *Quartex*, które łączone są ze sobą na różne sposoby (rys. 2.17a). Ponadto, Wang zajmował się budową płyt z innych modułów. Przykładowo w pracy [Wang, 1998] przedstawił ciekawą propozycję płyty zbudowanej ze zmodyfikowanych modułów *Octahedron 5z* (rys. 2.17b). Konstrukcja została zmodyfikowana poprzez pochylenie środkowego zastrzału i usztywnienie dołu struktury dodatkowymi elementami. Kolejne liczne przykłady struktur, powstałych na bazie ośmiościanu foremnego, Wang zawarł w pracy [Wang, 2012]. Były to propozycje struktur tymczasowych, składanych i rozkładanych w razie potrzeby (rys. 2.17c).

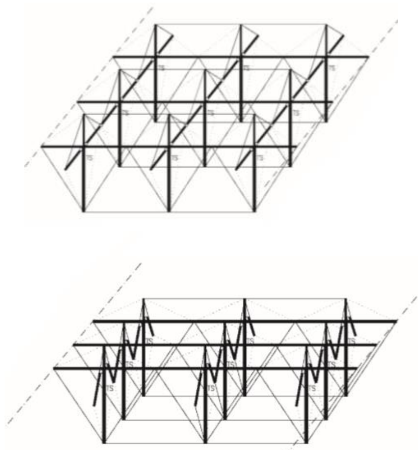
a)



b)



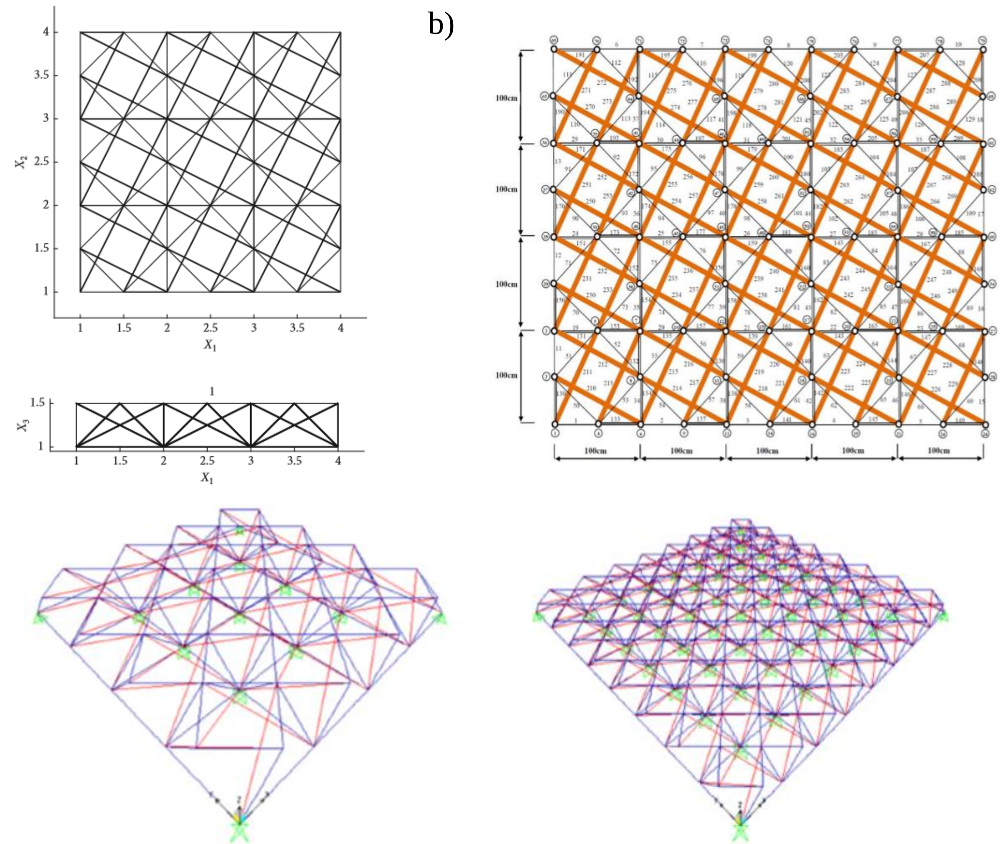
c)



Rys. 2.17. Modele Wanga: a) złożone z modułów *Quartex* [Wang, 2004], b) zbudowane z modułów *Octahedron 5z* [Wang, 1998], c) propozycje struktur tymczasowych [Wang, 2012]

Kolejnymi pracami, poświęconymi płytom tensegrity, złożonym z modułów *Quartex*, są m. in. prace Wanga i Xu, Faroughi i Lee oraz zespołu Sulaimana. W pracy [Xu *i in.*, 2018; Wang i Xu, 2019] zastosowano programowanie SDP (*semidefinite* *programming*) do określenia optymalnej topologii struktury tensegrity na przykładzie płyty złożonej z dziewięciu modułów (rys. 2.18a). Z kolei w pracy [Faroughi i Lee, 2014b], za pomocą algorytmu genetycznego, zoptymalizowano przekroje cięgien i zastrzałów struktury złożonej z dwudziestu modułów (rys. 2.18b). W pracy [Sulaiman *i in.*, 2016] autorzy rozważali płyty złożone z czterech lub ośmiu modułów pod kątem zastosowania w formie przekrycia dachowego (rys. 2.18c).

a) b) c)

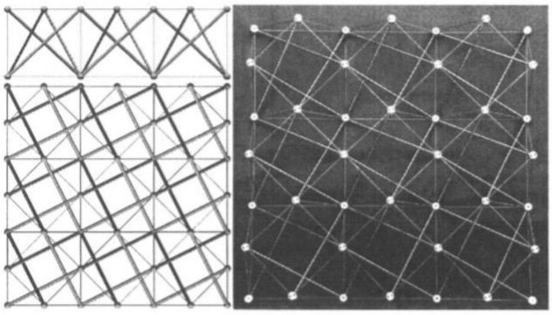


Rys. 2.18. Dwuwarstwowe kratownice tensegrity złożone z modułów *Quartex*: a) model Wang i Xu [Wang i Xu, 2019], b) model Faroughi i Lee [Faroughi i Lee, 2014b], c) modele zespołu Sulaimana [Sulaiman *i in.*, 2016]

Duży wpływ na rozwój dwuwarstwowych struktur tensegrity miał również zespół René Motro. Celem badań francuskich naukowców było potwierdzenie możliwości aplikacji struktur tensegrity w konstrukcjach inżynierskich [Motro, 1990, 2003]. Wykonany został model struktury składającej się z dziewięciu zmodyfikowanych modułów *Quartex* (*modified Quartex*) (rys. 2.19a). Konstrukcja ta nie miała jednak według badaczy dostatecznej sztywności, niezbędnej do zastosowania w rzeczywistych projektach. W ramach projektu *Tensarch*, stanowiącego główną część pracy doktorskiej

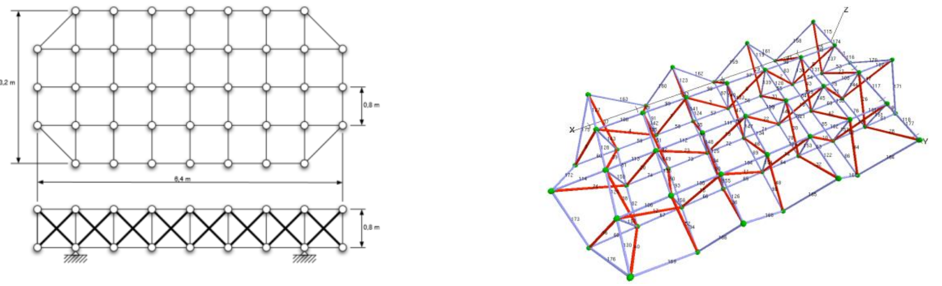
Viniciusa Raducano [Raducano, 2001], utworzono model eksperymentalny płyty tensegrity złożonej z modułów *2V expander* (rys 2.19b). Moduły *2V expander* składają się z czterech zastrzałów i dziewięciu cięgien. Prototyp miał powierzchnię 82 m^2 i ważył 900 kg. Nośność struktury, oszacowana według Eurokodu 3, wynosiła 1,6 kPa. Płyta o podobnej budowie była także tematem rozważań pracy Aversenga (rys. 2.19c) [Averseng, 2004].

a)



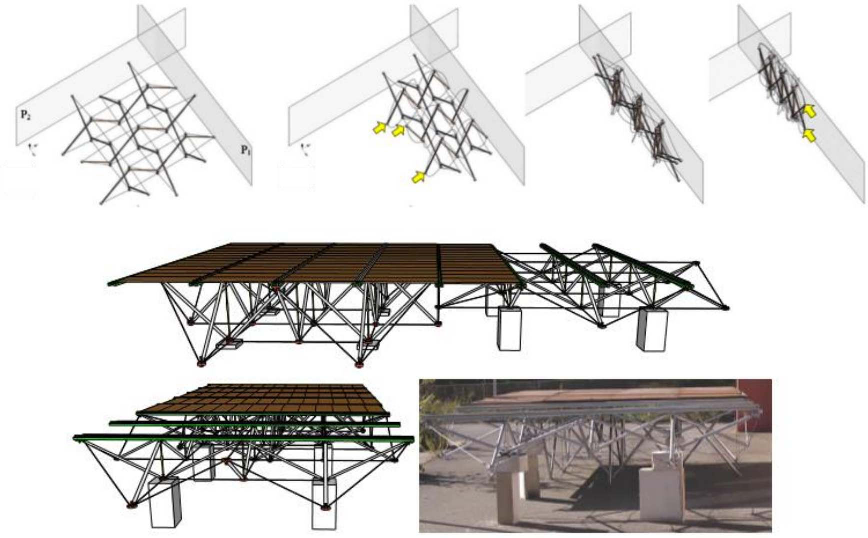
b)

c)



Rys. 2.19. Dwuwarstwowe kratownice tensegrity: a) struktura analizowana przez Motro [Motro, 1990], b) model płyty powstały w ramach projektu *Tensarch* [Raducano, 2001], c) model Juliena Aversenga [Averseng, 2004]

Kolejnymi osobami zajmującymi się płytami tensegrity są, wspomniany już Averseng, oraz Jamin i Quirant. W pracach [Jamin *i in.*, 2016; Averseng *i in.*, 2017] autorzy zaproponowali zastosowanie płyty tensegrity, złożonej z modułów *2V expander,* jako konstrukcji tymczasowej, umożliwiającej ludziom o ograniczonej sprawności ruchowej dostęp do sezonowego użytkowania, np. wybrzeża (rys. 2.20).

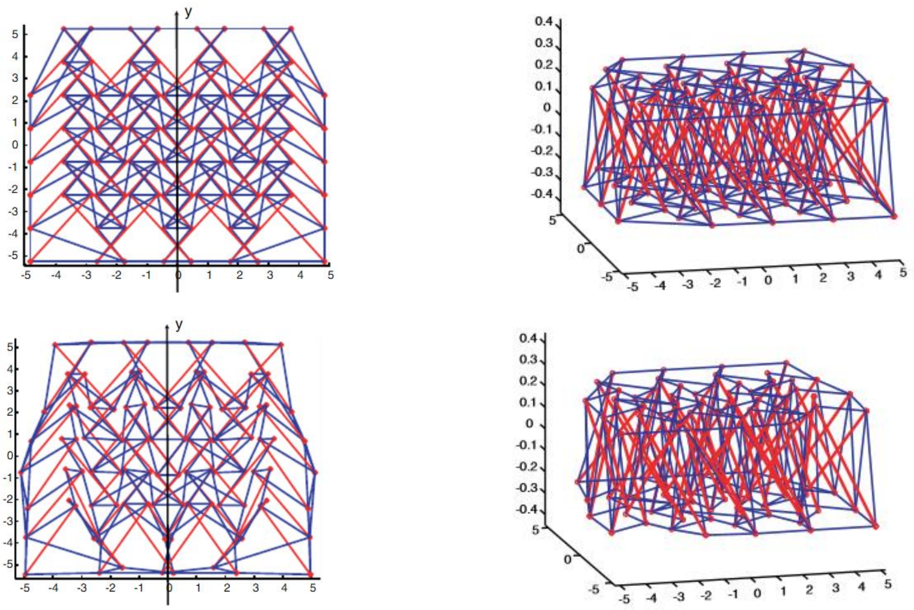


Rys. 2.20. Płyta tensegrity jako konstrukcja tymczasowa dla osób z ograniczoną sprawnością ruchową [Jamin *i in.*, 2016; Averseng *i in.*, 2017]

Płytami tensegrity zajmowali się także Masic, Skelton i Gill. W pracy [Masic *i in.*, 2005] przedstawili geometrię płyty tensegrity uzyskaną metodą algebraiczną. Na rysunku 2.21a pokazano pierwszą wersję struktury, natomiast na rysunku 2.21b – przekształconą geometrię, powstałą w wyniku opracowanej przez badaczy procedury optymalizacyjnej.

a)

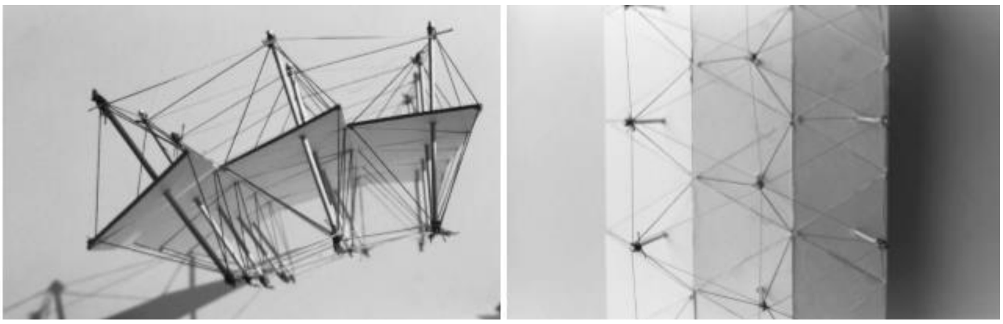
b)



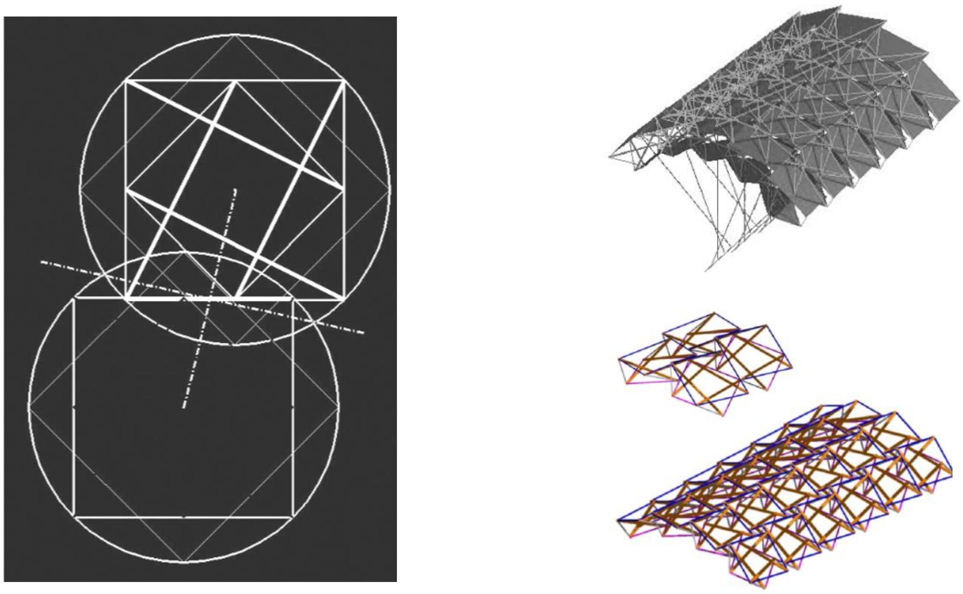
Rys. 2.21. Konfiguracje płyt tensegrity: a) konfiguracja pierwotna, b) konfiguracja przekształcona [Masic *i in.*, 2005]

W wielu pracach można odnaleźć propozycje aplikacji płyt tensegrity w rzeczywistych konstrukcjach inżynierskich [Liapi i Kim, 2003, 2004, 2009; Falk, 2006]. W pracy [Falk, 2006] sprawdzono możliwość zastosowania płyty tensegrity jako przekrycia pewnej hali jeździeckiej w Lund w Szwecji. Do rozważań przyjęto możliwość zbudowania płyty z modułów prostokątnych lub trójkątnych (rys. 2.22a). Natomiast w artykule [Liapi i Kim, 2003] przedstawiono koncepcję przekrycia jednokrzywiznowego, zbudowanego z modułów *modified Quartex.* Projekt został zgłoszony do międzynarodowego konkursu *Ephemeral Structures for the City of Athens* zorganizowanego w ramach *Cultural Olympiad for the 2004 Olympics* (rys. 2.22b). Liapi opatentowała także rozwiązanie konstrukcyjne modułu tensegrity służącego do konstruowania płyt (rys. 2.23).

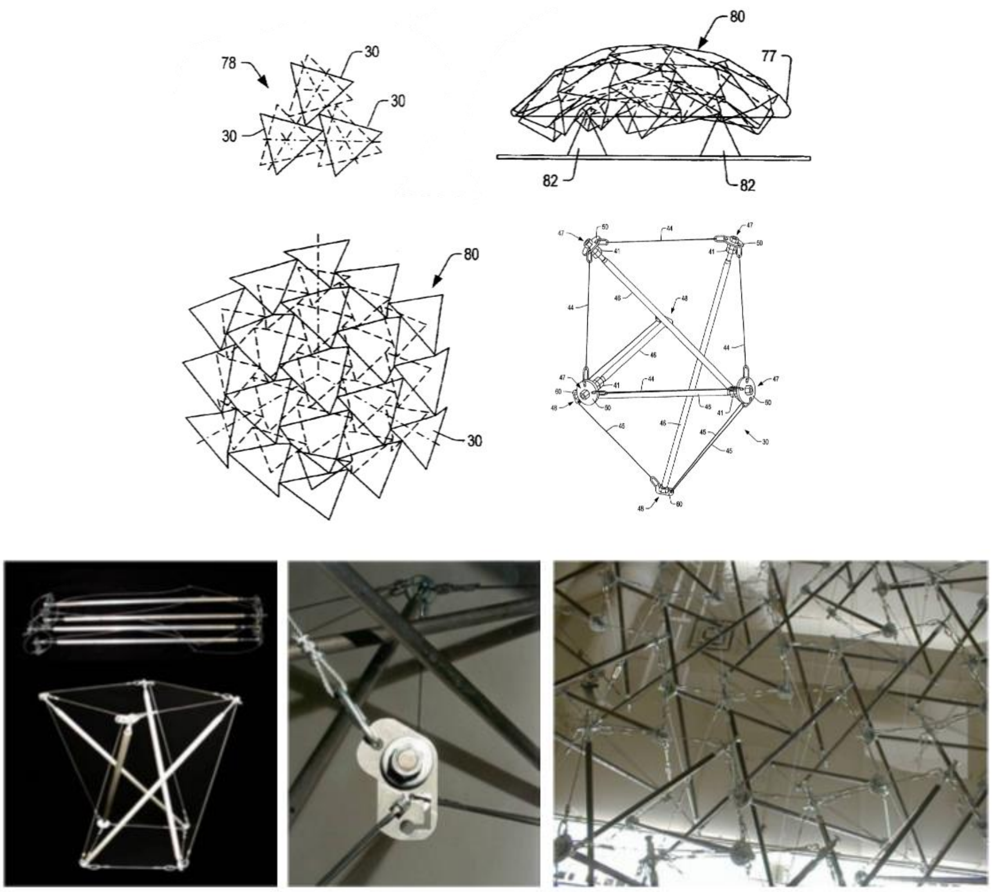
a)



b)



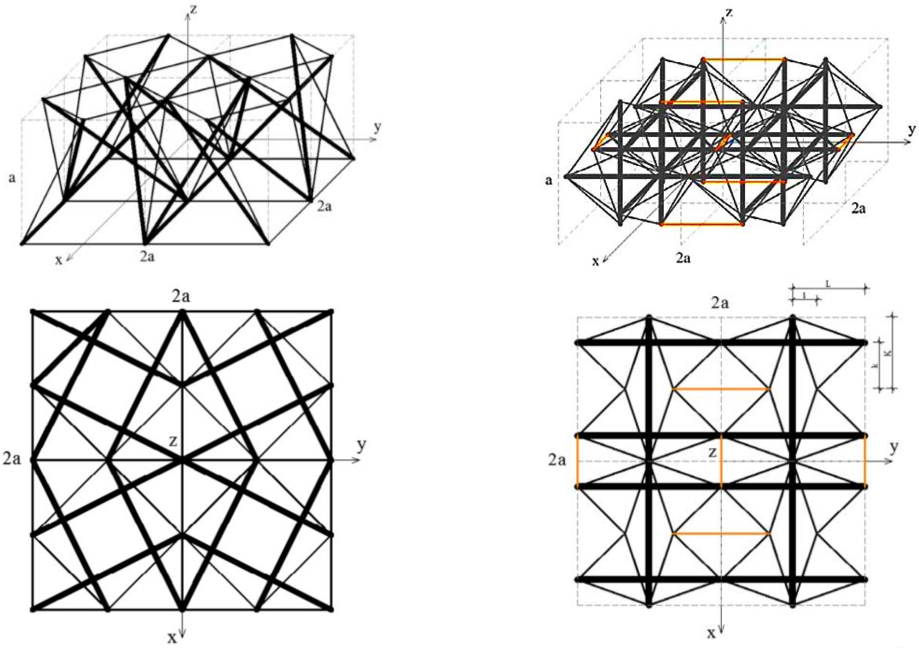
Rys. 2.22. Propozycje zastosowań dwuwarstwowych kratownic tensegrity w konstrukcjach inżynierskich: a) przekrycie hali zaproponowane przez Falka [Falk, 2006], b) przekrycie pawilonu wystawienniczego [Liapi i Kim, 2003, 2004]



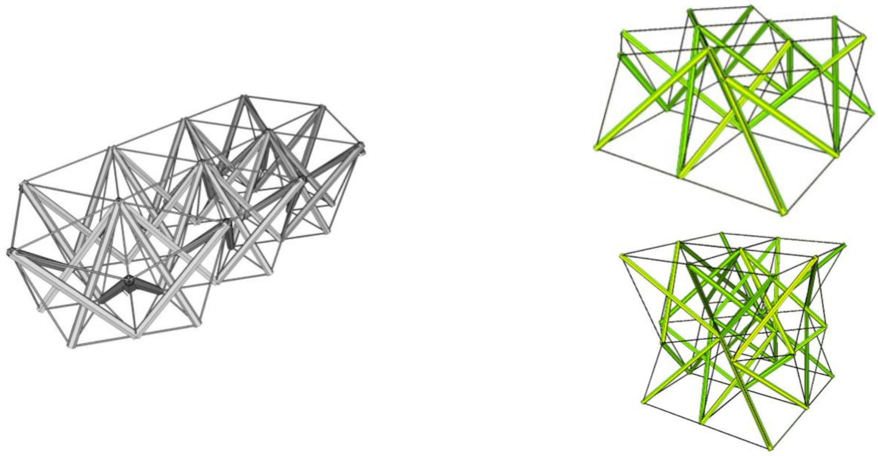
Rys. 2.23. Opatentowane przez Liapi rozwiązanie konstrukcyjne modułu do konstruowania płyt tensegrity Liapi [Liapi, 2002; Papantoniou, 2017]

Interesujące propozycje płyt tensegrity przedstawili także Al Sabouni-Zawadzka i Gilewski [Gilewski i Al Sabouni-Zawadzka, 2014; Al Sabouni-Zawadzka i Gilewski, 2014b; Gilewski *i in.*, 2015b; Al Sabouni-Zawadzka i Gilewski, 2015; Gilewski *i in.*, 2015a; Al Sabouni-Zawadzka *i in.*, 2016; Gilewski *i in.*, 2016, 2017; Al Sabouni-Zawadzka i Gilewski, 2018a; Gilewski *i in.*, 2018b; Al Sabouni-Zawadzka i Gilewski, 2018b; Gilewski *i in.*, 2018a, 2019b; Gilewski i Al Sabouni-Zawadzka, 2020]. W pracy [Al Sabouni-Zawadzka *i in.*, 2016], na przykładzie płyt złożonych z czterech modułów *Quatrex* i *expanded Octahedron,* przedstawili koncepcję analizy płyt tensegrity z zastosowaniem ortotropowego modelu kontynualnego (rys. 2.24a). Z kolei w pracach [Al Sabouni-Zawadzka i Gilewski, 2014a, 2018a, b; Gilewski i Al Sabouni-Zawadzka, 2014] dwuwarstwowe kratownice tensegrity zbudowane z modułów *Simplex, Quartex* i *dwuwarstwowy Quartex* zostały zaproponowane jako konstrukcje inteligentne oraz jako struktura metamateriału (rys. 2.24b).

a)

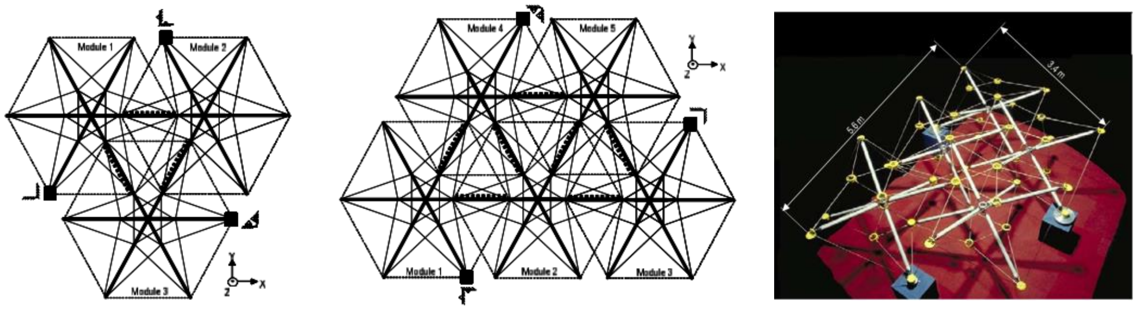


b)



Rys. 2.24. Dwuwarstwowe kratownice tensegrity Al Sabouni-Zawadzkiej i Gilewskiego: a) modele sprawdzające model kontynualny [Al Sabouni-Zawadzka *i in.*, 2016], b) płyta tensegrity jako konstrukcja inteligentna oraz metamateriał [Al Sabouni-Zawadzka, 2014; Al Sabouni-Zawadzka i Gilewski, 2018b]

Podobnie jak w pracach Al Sabouni-Zawadzkiej i Gilewskiego, zastosowaniem płyty tensegrity w kontekście konstrukcji inteligentnych zajmowali się Fest, Shea i Smith. W pracy [Fest Etienne *i in.*, 2003, 2004] zaproponowano koncepcję płyty zbudowanej z trzech lub pięciu gwieździstych modułów tensegrity o regulowanych wymiarach, stosowanej w konstrukcjach tymczasowych, np. w halach wystawienniczych (rys. 2.25). Co ciekawe, model eksperymentalny konstrukcji zbudowanej z pięciu modułów podparto niesymetrycznie.



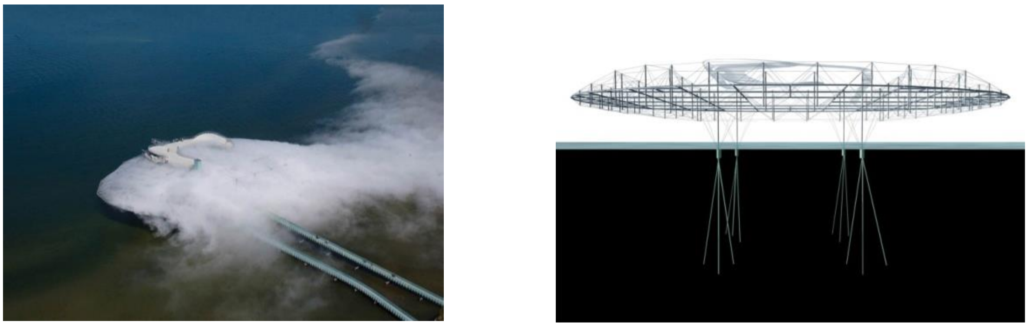
Rys. 2.25. Inteligentne płyty tensegrity jako konstrukcje tymczasowe [Fest Etienne *i in.*, 2004]

Wyżej wymienione przykłady są pracami teoretycznymi bądź eksperymentalnymi, ale istnieją także praktyczne zastosowania płyt tensegrity w budownictwie. Najsłynniejszym i najbardziej spektakularnym przykładem dwuwarstwowej kratownicy typu tensegrity jest, utworzony na potrzeby Expo 2012 w Szwajcarii, pawilon *Blur Building* (rys. 2.26a). *Blur Building* zostało zaprojektowane jako struktura tymczasowa, która została rozebrana po zakończeniu wystawy. Autorami tego projektu byli Elizabeth Diller i Richardo Scofidio, którzy nazwali *Blur Building „architekturą atmosfery”*. Konstrukcja była wsparta na czterech słupach i wydawała się rozmywać nad powierzchnią jeziora Neuchâtel. Unoszącą się nad *Blur Building* mgłą sterował inteligentny system pogodowy, który dopasowywał parametry pracy 35 000 dysz rozpryskujących wodę do zmieniających się warunków pogodowych (temperatury, wilgotności, prędkości wiatru). Konstrukcja mierzyła 91 m długości, 61 m szerokości i była umieszczona 23 m nad powierzchnią jeziora. Strukturę zbudowano z modułu *Octahedron 5z* z dodatkowymi cięgnami łączącymi wierzchołki [Crawford, 2015].

Konstrukcję tensegrity stanowi także dach nad patio Bank Annex w Atenach. Struktura ta powstała z modułu *Quartex* łączonego w układzie zastrzał-cięgno (rys. 2.26b). Podobną konstrukcją charakteryzuje się przekrycie pawilonu wystawowego w Patras w Grecji. W tym przypadku strukturze nadano pojedynczą krzywiznę (rys. 2.26c).

Bardzo interesujące koncepcje dwuwarstwowych kratownic tensegrity przedstawiono w pracy [Papantoniou, 2017]. Modele zbudowane zostały z modułu *modified Quartex* i opisane zostały na skomplikowanych bryłach geometrycznych (rys. 2.27a, b). Struktury zostały zamodelowane w środowisku *Grasshopper*.

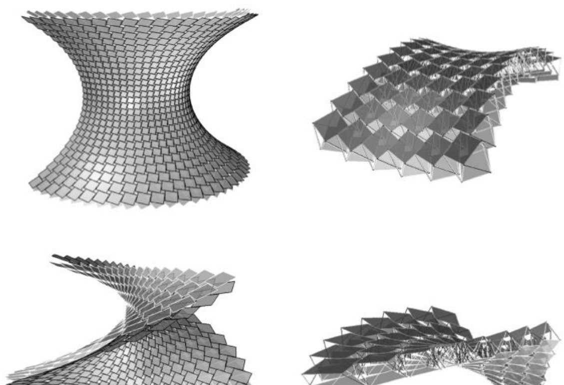
a)



b)

c)

Rys. 2.26. Praktyczne zastosowania dwuwarstwowych kratownic typu tensegrity: a) *Blur Building* [https://dsrny.com/project/blur-building], b) Bank Annex (Ateny, Grecja) [Liapi i Kim, 2009], c) pawilon wystawowy (Patras, Grecja) [Liapi i Kim, 2009]



Rys. 2.27. Dwuwarstwowe kratownice płyty tensegrity Andreany Papantoniou: a) opisane na katenoidzie, b) opisane na helikoidzie [Papantoniou, 2017]

ROZDZIAŁ 3.

CHARAKTERYSTYCZNE CECHY STRUKTUR TENSEGRITY

3.1. Wprowadzenie

Idea struktur tensegrity istnieje już ponad 60 lat. Przez ten okres wielu badaczy zajmowało się tym wyjątkowym typem konstrukcji (m. in. René Motro, Bin-Bing Wang, Robert E. Skelton, Antony Pugh), przy czym każdy z nich próbował zdefiniować istotę tej idei na swój sposób. Pierwsze próby opisu struktur tensegrity pochodzą oczywiście od twórców idei. Fuller, w artykule *Tensegrity* [Fuller, 1961], szczegółowo objaśnił zasady pracy struktur tensegrity, jednakże nie podał ścisłej definicji. W kolejnych latach podejmował próby zdefiniowania pojęcia tensegrity. Najprecyzyjniejsza jest definicja z 1975 roku: *„Tensegrity opisuje wzajemne relacje zachodzące w konstrukcji, według których kształt tejże konstrukcji może być zachowany poprzez skończenie zamknięty, ciągły układ elementów rozciąganych, a nie poprzez nieciągłe elementy poddane wyłącznie lokalnemu ściskaniu"* [Fuller *i in.*, 1976]. W historii tensegrity zapisała się jednakże inna, bardziej poetycka, podana przez Fullera, definicja: „*Elementy ściskane są małymi wyspami w morzu rozciągania*" [Fuller, 1962]. Snelson, podobnie jak Fuller, podjął się zdefiniowania tych struktur w swoim patencie: „*Niniejszy wynalazek dotyczy ram strukturalnych, których nowatorska konstrukcja składa się z prętów, które są ściskane lub rozciągane, przy czym elementy ściskane są od siebie oddzielone, natomiast elementy rozciągane są ze sobą połączone, tworząc ciągłą siatkę*" [Snelson, 1965]. Snelson „nie lubił" terminu tensegrity, ze względu na zawartą w nim wieloznaczność. Wolał sformułowanie „*pływające rozciąganie*", które jednak nie zyskało tak dużej popularności jak nazwa wymyślona przez Fullera. Snelson zrezygnował więc z terminu „*pływające rozciąganie*" i w 2004 roku podał następującą definicję struktur tensegrity: *„Tensegrity opisuje zamknięty układ konstrukcyjny złożony z trzech lub więcej podłużnych elementów ściskanych umieszczonych wewnątrz sieci ciągłych elementów rozciąganych, które wzajemnie opierają się na sobie tak, że elementy ściskane się nie stykają się ze sobą, ale napierają na zewnątrz punktów węzłowych, tworząc sztywny, trójkątny w przekroju, sprężony moduł ściskany i rozciągany jednocześnie"* [Snelson, 2002].

Z kolei, Emmerich w swoim zgłoszeniu patentowym przedstawił ideę tensegrity jedynie w formie przykładowych rysunków.

Mnogość prac oraz, w związku z tym, mnogość opisów powoduje wiele niejasności, w związku z czym wiele konstrukcji jest określanych tym terminem błędnie. Czasami brakuje zrozumienia czym są konstrukcje tensegrity i w przypadku konstrukcji budowlanych nie odróżnia się ich od zwykłych ustrojów prętowo-cięgnowych. Należy tu zwrócić uwagę, że struktury tensegrity mają pewne charakterystyczne cechy, które wyróżniają je na tle typowych konstrukcji i są istotne w procesie projektowania. W przeciwieństwie do konwencjonalnych ustrojów cięgnowo-prętowych, konstrukcje tensegrity charakteryzują się systemem sił wewnętrznych, który utrzymuje elementy konstrukcyjne w stabilnej równowadze (stan samonaprężenia – *self-stress state*). Najbardziej interesujące są struktury tensegrity charakteryzujące się występowaniem nieskończenie małych mechanizmów. W przypadku braku początkowych sił sprężających (naprężeń własnych) takie układy są niestabilne, innymi słowy, geometrycznie zmienne. Stabilizacja następuje dopiero po wprowadzeniu wstępnych naprężeń. Ich modyfikacja pozwala na kontrolę parametrów statycznych i dynamicznych konstrukcji.

Znajdowanie formy tensegrity polega na poszukiwaniu, niezależnych od obciążenia i sposobu podparcia, stanów samonaprężenia nazywanych w literaturze przedmiotu poszukiwaniem formy tensegrity (*form-finding method*). Metody *form-finding* polegają na określeniu takiej konfiguracji elementów (układu węzłów i prętów), przy której w konstrukcji występuje stabilny stan naprężenia. Metody te są bardzo zróżnicowane i polegają na określeniu takiej konfiguracji prętów, przy której w konstrukcji występuje stabilny stan samonaprężenia [Schek, 1974; Barnes, 1999; Linkwitz, 1999; Paul *i in.*, 2005; Masic *i in.*, 2005; Baudriller *i in.*, 2006; Estrada *i in.*, 2006; Pagitz i Mirats Tur, 2009; Chi Tran i Lee, 2010; Korkmaz *i in.*, 2012; Koohestani, 2012, 2013, 2020; Malerba *i in.*, 2012; Gilewski i Kasprzak, 2013; Koohestani i Guest, 2013; Ohsaki i Zhang, 2015; Lee *i in.*, 2017, 2022; Amalina i Oh, 2018; Lee i Choong, 2018; Cai *i in.*, 2018; Kan *i in.*, 2018; Feng, 2018; Goyal *i in.*, 2019, 2020; Dong *i in.*, 2019; Arcaro i Adeli, 2019; Chen i Skelton, 2020; Li *i in.*, 2020b, a; Zhang *i in.*, 2020, 2021a, b, b; Shuo *i in.*, 2020; Wang *i in.*, 2020, 2021a, b; Zhao *i in.*, 2021, 2023; Song *i in.*, 2022; Sun *i in.*, 2022, 2023; Tkachuk, 2022; Bui *i in.*, 2022; Ma *i in.*, 2022; Jiang *i in.*, 2023; Fan *i in.*, 2023].

Metody *form-finding* służą głównie do kształtowania konstrukcji, jednak można je również wykorzystać do identyfikacji stanów samonaprężenia i mechanizmów. W pracy, w tym celu wykorzystano analizę spektralną macierzy kratownic [Kasprzak, 2014; Gilewski *i in.*, 2015b; Al Sabouni-Zawadzka, 2016; Gilewski *i in.*, 2017; Kłosowska *i in.*, 2018; Obara, 2019a; Obara i Tomasik, 2020, 2021a, b; Tomasik i Obara, 2021; Obara i Tomasik, 2023; Obara *i in.*, 2023]. To podejście w odróżnieniu od innych metod *form-finding*, umożliwia zidentyfikowanie wszystkich charakterystycznych cech struktur tensegrity i nazywane jest oceną jakościową.

Analiza jakościowa przestrzennych struktur tensegrity w sposób szczegółowy zostanie omówiona w rozdziale 5. Jednak w celu zrozumienia mechaniki tensegrity, niezbędnym jest zilustrowanie, na prostych przykładach, immamentnych cech tych struktur, tj. nieskończenie małego mechanizmu i stanu samonaprężenia.

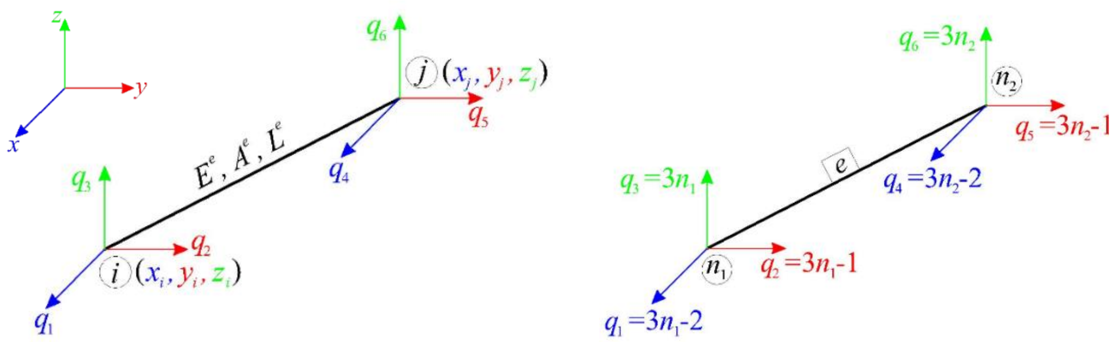
3.2. Opis matematyczny

Struktury tensegrity to przestrzenne kratownice, w których występuje samorównoważny układ sił wewnętrznych (self-stress). Do analizy tych struktur wykorzystywana jest metoda elementów skończonych [Szmelter, 1980; Bathe, 1982; Zienkiewicz *i in.*, 2013]. Kratownice tensegrity składają się z prętów rozciąganych (cięgien) i ściskanych (zastrzałów). W globalnym kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y, z) pojedynczy element skończony e (rys. 3.1a) o module Younga E^e, polu przekroju A^e, długości L^e jest opisany poprzez wektor wydłużeń $\mathbf{B}^e (\in \mathbb{R}^{1\times 6})$:

$$\mathbf{B}^e = [-\mathrm{c}_x \quad -\mathrm{c}_y \quad -\mathrm{c}_z \quad \mathrm{c}_x \quad \mathrm{c}_y \quad \mathrm{c}_z], \tag{3.1}$$

gdzie:

$$\mathrm{c}_x = \frac{x_j - x_i}{L_e}, \mathrm{c}_y = \frac{y_j - y_i}{L_e}, \mathrm{c}_z = \frac{z_j - z_i}{L_e}.$$



Rys. 3.1. a) element skończony kratownicy przestrzennej, b) globalne stopnie swobody elementu e

Struktura tensegrity jest n-elementową kratownicą $(e = 1, 2, \ldots, n)$ o m stopniach swobody opisanych wektorem przemieszczeń $\mathbf{q}(\in \mathbb{R}^{m\times 1})$, wektorem wydłużeń prętów $\mathbf{\Delta}(\in \mathbb{R}^{n\times 1})$ oraz wektorem sił podłużnych $\mathbf{S}(\in \mathbb{R}^{n\times 1})$:

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad \ldots \quad q_m]^T, \mathbf{\Delta} = [\Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \ldots \quad \Delta_m]^T,\ \mathbf{S} = [S_1 \quad S_2 \quad \ldots \quad S_n]^T. \tag{3.2}$$

Zależności pomiędzy wielkościami (3.2) są opisane kolejno poprzez związki geometryczne, związki fizyczne i równania równowagi z uwzględnieniem warunków podparcia:

$$\mathbf{\Delta} = \mathbf{Bq};\ \ \mathbf{S} = \mathbf{E\Delta};\ \mathbf{B}^T\mathbf{S} = \mathbf{P}, \tag{3.3}$$

gdzie:

$\mathbf{P}(\in \mathbb{R}^{n\times 1})$ – wektor obciążeń węzłowych,

$\mathbf{E}(\in \mathbb{R}^{n\times n})$ – macierz sprężystości

$$\mathbf{E} = diag\left[\frac{E^1A^1}{L^1} \quad \frac{E^2A^2}{L^2} \quad \ldots \quad \frac{E^nA^n}{L^n}\right], \tag{3.4}$$

$\mathbf{B}(\in \mathbb{R}^{n\times m})$ – macierz wydłużeń:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^1\mathbf{C}^1 \\ \mathbf{B}^2\mathbf{C}^2 \\ \ldots \\ \mathbf{B}^n\mathbf{C}^n \end{bmatrix}, \tag{3.5}$$

gdzie $\mathbf{C}_e(\in \mathbb{R}^{6\times m})$ jest macierzą Boole'a. Przyjmuje się, że liczba globalnych stopni swobody każdego elementu q_i $(i\ =\ 1, 2, \ldots, 6)$ odpowiada liczbie globalnych węzłów elementów n_1, n_2, jak pokazano na rysunku 3.1b. W konsekwencji niezerowe elementy $\mathbf{C}_e$ można wyrazić jako $\mathbf{C}_{iq_i} = 1$.

Równania równowagi $(3.3)_3$ można przedstawić odpowiednio w postaci naprężeniowej lub przemieszczeniowej:

$$\mathbf{B}\mathbf{B}^{T}\mathbf{S} = \mathbf{B}\mathbf{P}; \qquad \mathbf{K}_L\mathbf{q} = \mathbf{P}, \tag{3.6}$$

gdzie:

$\mathbf{B}\mathbf{B}^T (\in \mathbb{R}^{n\times n})$ – macierz zgodności,

$\mathbf{K}_L (\in \mathbb{R}^{m\times m}) = \mathbf{B}^T\mathbf{E}\mathbf{B}$ – macierz sztywności liniowej.

Równania równowagi $(3.6)_2$ można uzupełnić uwzględniając wstępne sprężenie **S:**

$$[\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\sigma(\mathbf{S})]\mathbf{q} = \mathbf{P}, \tag{3.7}$$

gdzie:

$\mathbf{K}_\sigma(\mathbf{S}) (\in \mathbb{R}^{m\times m})$ – macierz sztywności geometrycznej:

$$\mathbf{K}_\sigma(\mathbf{S}) = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{C}^e)^T \mathbf{K}_\sigma^e(S^e)\, \mathbf{C}^e;\ \mathbf{K}_\sigma^e(S^e) = \frac{S^e}{L^e}\begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix};\ \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

3.3. Identyfikacja cech charakterystycznych

Zgodnie ze wzorem Maxwella [Maxwell, 1864], niepodparta konstrukcja będzie poprawnie zdefiniowana, jeśli:

– $n - 2w + 3 = 0$ – układ płaski (cyfra 3 odnosi się do ilości ruchów sztywnych w przestrzeni dwuwymiarowej),

– $n - 3w + 6 = 0$ – układ przestrzenny (cyfra 6 odnosi się do ilości ruchów sztywnych w przestrzeni trójwymiarowej).

Są to wzory odnoszące się do konstrukcji statycznie wyznaczalnych, natomiast w przypadku konstrukcji statycznie niewyznaczalnych powyższe zależności mają postać:

– $n - 2w + 3 > 0$ – układ płaski,

– $n - 3w + 6 > 0$ – układ przestrzenny.

W przypadku struktur tensegrity wzór Maxwella nie ma zastosowania. Przykładowo, biorąc pod uwagę najprostszy moduł tensegrity, *Simplex* (rozdział 2 – rys. 2.9), mający 6 węzłów, zgodnie ze wzorem Maxwella powinien składać się z 12 prętów, a nie z 9. Wzór Maxwella nie uwzględnia bowiem występowania stanów samonaprężenia (lss) oraz mechanizmów (lm). W tym przypadku zastosowanie znajduje uogólniony wzór Maxwella [Calladine, 1978; Tarnai i Gaspar, 1983; Pellegrino i Calladine, 1986;

Calladine i Pellegrino, 1991], według którego konstrukcja jest poprawnie zdefiniowana, gdy:

$$n - m = lss - lm. \tag{3.9}$$

W przypadku gdy konstrukcja charakteryzuje się występowaniem stanów samonaprężenia ($lss > 0$), to jest ona statycznie niewyznaczalna. Jeżeli w strukturze występuje mechanizm ($lm > 0$), to jest ona kinematycznie niewyznaczalna. System tensegrity, w którym występuje zarówno stan samonaprężenia, jak i mechanizm jest więc statycznie i kinematycznie niewyznaczalny.

Występowanie stanów samonaprężenia (lss) oraz mechanizmów (lm) zależy jedynie od geometrii konstrukcji (nie jest konieczna znajomość przekrojów prętów i ich własności materiałowych), wobec czego wystarczająca jest znajomość macierzy wydłużeń (3.5).

3.3.1. Stan samonaprężenia

Stan samonaprężenia jest układem samorównoważonych sił podłużnych $\mathbf{S}(\in \mathbb{R}^{n\times 1})$, które nie zależą od obciążenia i sposobu podparcia. Najprostszą metodą wyznaczenia stanu samonaprężenia jest bilans węzłów. Podejście to ma zastosowanie tylko w przypadku konstrukcji prostych i statycznie wyznaczalnych. Drugą dokładną metodą jest analiza spektralna macierzy zgodności $\mathbf{BB}^{\boldsymbol{T}}(\in \mathbb{R}^{n\times n})$:

$$(\mathbf{BB}^{\mathrm{T}} - \mu\mathbf{I})\mathbf{y} = \mathbf{0}. \tag{3.10}$$

W przypadku gdy wartości własne μ macierzy (3.10) są dodatnio określone, to w konstrukcji nie występuje samorównoważny układ sił podłużnych. Zerowe wartości własne $\mu_i = 0$ odpowiadają za istnienie niezerowego rozwiązania równań jednorodnych $(3.6)_1$ $(\mathbf{P} = \mathbf{0})$ zwanego samonaprężeniem lub dokładniej samozrównoważonymi siłami normalnymi, spełniającymi jednorodne równania równowagi. Stan samonaprężenia realizowany jest przez wektor własny odpowiadający zerowej wartości własnej $\mathbf{S} = \mathbf{y}_i(\mu_i = 0)$. Liczba stanów samonaprężenia (lss) jest równa liczbie zerowych wartości własnych.

Identyfikacja stanu samonaprężenia umożliwia zbudowanie macierzy sztywności geometrycznej (3.8).

3.3.2. Mechanizm

Występowanie mechanizmu charakteryzuje ustrój geometrycznie zmienny, czyli taki, w którym wystąpienie przemieszczeń nie musi być powiązane z powstaniem sił wewnętrznych. Mechanizmy mogą być skończone (ruchy ciała sztywnego) lub nieskończenie małe (infinitezymalne).

Mechanizmy skończone odnoszą się do ruchów, które nie zmieniają odległości między dowolną parą węzłów. Mechanizmy infinitezymalne opisują natomiast lokalną zmienność geometryczną w zakresie małych przemieszczeń. Mechanizm jest cechą własną konstrukcji. W celu jego identyfikacji, można wykorzystać analizę spektralną szczególnej macierzy sztywności liniowej, tzn. takiej, dla której macierz sprężystości jest jednostkowa $\mathbf{K}_L = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}$ ($\in \mathbb{R}^{m \times m}$):

$$(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{q} = \mathbf{0}. \tag{3.11}$$

Wartości własne λ macierzy (3.11) opisują stany energetyczne modułu, zaś wektory własne $\mathbf{q}$ opisują postacie deformacji. Gdy wszystkie wartości własne są dodatnio określone, to w konstrukcji nie występuje mechanizm. Zerowe wartości własne $\lambda_i = 0$ (jeśli istnieją) odnoszą się do mechanizmów skończonych lub nieskończenie małych, które można uznać za wektory własne związane z zerową wartością własną $\mathbf{q}_i(\lambda_i = 0)$. Liczba mechanizmów (lm) jest równa liczbie zerowych wartości własnych.

Analiza spektralna (3.11) nie jest wystarczająca do określenia typu mechanizmu. Do jego identyfikacji konieczna jest analiza zagadnienia własnego uwzględniającego stany samonaprężenia, czyli analiza spektralna macierzy sztywności występującej w równaniu (3.7):

$$(\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\sigma(\mathbf{S}) - \sigma\mathbf{I})\mathbf{z} = 0. \tag{3.12}$$

Dodatnio określone wartości własne σ macierzy (3.12) oznaczają, że konstrukcja jest stateczna, a to z kolei oznacza, że stan samonaprężenia likwiduje mechanizm, czyli mamy do czynienia z mechanizmem infinitezymalnym. Zerowe wartości własne $\sigma_i = 0$ oznaczają ruch ciała sztywnego, a ujemne $\sigma_i < 0$ – niestateczność konstrukcji.

3.4. Klasyfikacja struktur tensegrity

W literaturze można znaleźć wiele definicji struktur tensegrity. Poza Fullerem, Emmerichem i Snelsonem próbę zdefiniowania podjęli m. in. Motro, Pugh, Hanaor, Miura i Pellegrino, Gomez-Jauregui, Burkhardt, Bin-Bing [Pugh, 1976; Motro, 1984, 1990, 2003; Hanaor, 1988, 1991, 1992, 1993, 1994, 1997, 2016; Wang, 1998, 2004, 2012; Tibert, 2002; Smaili i Motro, 2007; Burkhardt, 2008; Gomez-Jauregui *i in.*, 2010, 2012, 2013]. Ze względu na niejednolitość stosowanych opisów, w pracy skorzystano z podziału struktur tensegrity na cztery grupy zaproponowanego przez Obarę [Obara, 2019a]. Klasyfikacja ta została dokonana ze względu na występowanie sześciu charakterystycznych cech, które wyróżniają je spośród typowych struktur cięgnowo-prętowych, tj.:

- struktury tensegrity zaliczane są do konstrukcji kratowych (***K***),
- w strukturach tensegrity występuje samorównoważny układ sił wewnętrznych, o określonych proporcjach, które nie zależą od obciążeń zewnętrznych i od warunków podparcia, tzw. stan samonaprężenia (*self-stress stress*) (***S***),
- w strukturach tensegrity występują mechanizmy infinitezymalne stabilizowane przez stan samonaprężenia (***M***),
- elementy ściskane (zastrzały) znajdują się wewnątrz układu elementów rozciąganych (***W***),
- elementy rozciągane nie mają sztywności na ściskanie, czyli są cięgnami (***C***),
- układ elementów ściskanych jest nieciągły (zastrzały nie łączą się ze sobą) (***N***).

Klasyfikacja polega na ocenie, które z charakterystycznych cech występują w analizowanej konstrukcji (tabela 3.1). Wyodrębnione zostały następujące grupy:

- *idealne tensegrity* – struktury charakteryzujące się wszystkimi cechami ***K***, ***S***, ***M***, ***W***, ***C*** i ***N***,
- *„czyste” tensegrity* – struktury, w których nie występuje ostatnia omawiana cecha, a mianowicie, nie jest spełniony warunek nieciągłości elementów ściskanych (konstrukcje charakteryzujące się cechami: ***K***, ***S***, ***M***, ***W*** i ***C***),
- *konstrukcje o cechach tensegrity klasy 1* – struktury charakteryzujące się obligatoryjnie czterema cechami: są kratownicami (***K***), elementy rozciągane są cięgnami (***C***), a występujący w nich stan samonaprężenia (***S***) stabilizuje mechanizm infinitezymalny (***M***),
- *konstrukcje o cechach tensegrity klasy 2* – struktury charakteryzujące się obligatoryjnie trzema cechami: są kratownicami (***K***), występuje w nich stan samonaprężenia (***S***), a elementy rozciągane są cięgnami (***C***), dodatkowo w tych strukturach występuje minimum jedna z dwóch pozostałych cech, tj. ***W*** –

zastrzały znajdują się wewnątrz układu elementów rozciąganych lub ***N*** – układ elementów ściskanych jest nieciągły.

Tabela 3.1. *Klasyfikacja struktur tensegrity*

	K	***S***	***M***	***C***	***W***	***N***
idealne tensegrity	+	+	+	+	+	+
„czyste" tensegrity	+	+	+	+	+	–
konstrukcje o cechach tensegrity klasy 1	+	+	+	+	–	–
konstrukcje o cechach tensegrity klasy 2	+	+	–	+	+ –	– +

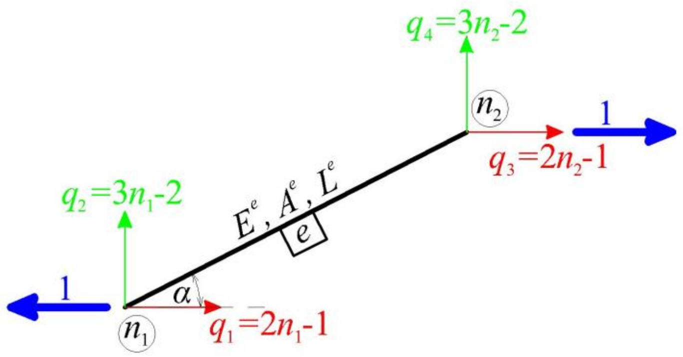
3.5. Przykłady zachowania się płaskich struktur

W celu zilustrowania zachowania się struktur charakteryzujących się występowaniem stanów samonaprężenia i mechanizmów przeanalizowano konstrukcje płaskie, dla których w sposób jawny można przedstawić tok postępowania. Rozpatrzono trzy przykłady najprostszych konstrukcji kratowych, tj. pojedynczy element, strukturę złożoną z dwóch elementów połączonych przegubowo oraz kratownicę ze skratowaniem X. W przypadku płaskiego elementu kratowego wektor wydłużeń (3.1) ma następującą postać:

$$\mathbf{B}^e = [-\cos\alpha \quad -\sin\alpha \quad \cos\alpha \quad \sin\alpha], \tag{3.13}$$

gdzie:

α – kąt pomiędzy elementem a kierunkiem poziomym (rys. 3.2).

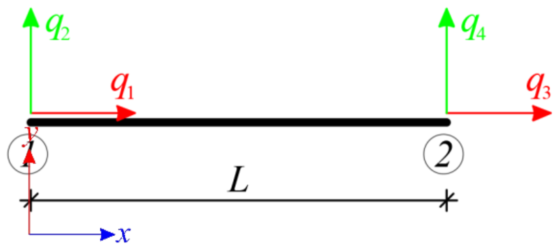


Rys. 3.2. Graficzna reprezentacja wektora wydłużeń $\mathbf{B}^e$

3.5.1. Niepodparty pojedynczy element kratowy

Pierwszym przykładem jest pojedynczy $(n = 1)$ niepodparty $(m = 4)$ element kratowy o długości L (rys. 3.3). Wektor przemieszczeń $\mathbf{q}$ $(\in \mathbb{R}^{4\times1})$ i macierz wydłużeń $\mathbf{B}$ $(\in \mathbb{R}^{1\times4})$ mają następującą postać:

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4]^T, \ \mathbf{B} = [-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0]. \tag{3.14}$$



Rys. 3.3. Płaski niepodparty element kratowy

1. Identyfikacja stanów samonaprężenia

W przypadku pojedynczego elementu kratowego, macierz zgodności $\mathbf{BB}^{\mathrm{T}}(\in \mathbb{R}^{1\times1})$ ma postać:

$$\mathbf{BB}^{\mathrm{T}} = [2], \tag{3.15}$$

i charakteryzuje się jedną wartością własną:

$$\mu_1 = \{2\}, \tag{3.16}$$

która jest większa od zera. Oznacza to, że w konstrukcji nie występuje stan samonaprężenia $(lss = 0)$.

2. Identyfikacja mechanizmów

W przypadku pojedynczego elementu kratowego, szczególna macierz sztywności $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}(\in \mathbb{R}^{4\times4})$ ma postać:

$$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.17}$$

i charakteryzuje się czterema wartościami własnymi:

$$\lambda_i = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad 2\}, \tag{3.18}$$

którym odpowiadają następujące wektory własne:

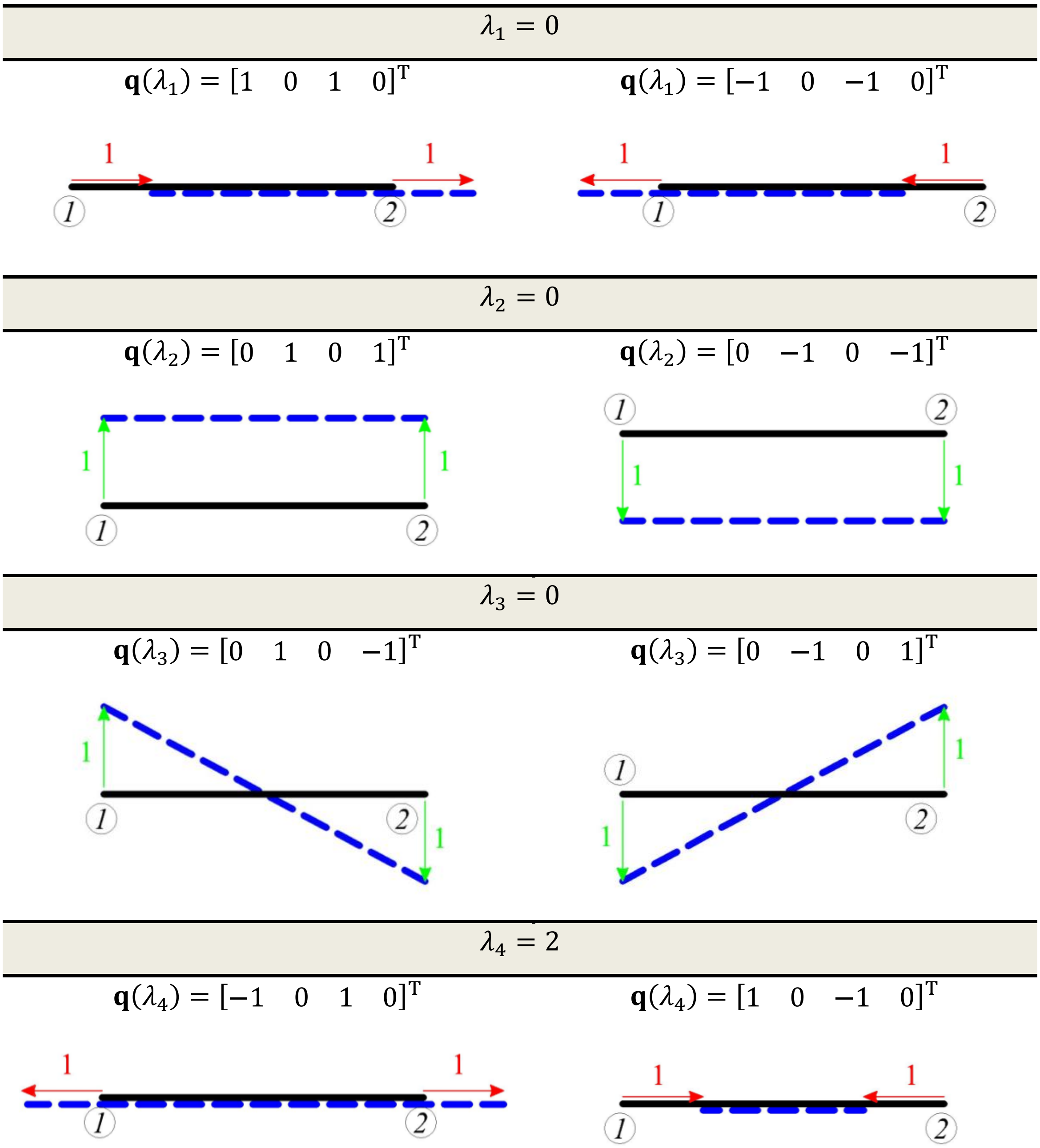
$$\mathbf{q}(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ lub } \mathbf{q}(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.19}$$

Interpretację fizyczną wektorów własnych (3.19) przedstawiono na rysunku 3.4. Trzy pierwsze, zerowe wartości własne odpowiadają mechanizmom ($lm = 3$), a powiązane z nim wektory własne opisują kolejno translacje w kierunkach x i y oraz obrót w płaszczyźnie elementu. W analizowanym przykładzie żadna z tych deformacji nie powoduje postania jakichkolwiek sił – dla $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ równanie (3.11) ma postać $(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{q} \equiv \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{q} = \mathbf{0}$. Nie zmieniają się również odległości pomiędzy węzłami, co oznacza, że są to mechanizmy skończone. Ostatnia, niezerowa, wartość własna $\lambda_4 = 2$ odpowiada za wydłużenie lub skrócenie elementu.

Po określeniu liczby stanów samonaprężenia i mechanizmów, wzór Maxwella (3.9) dla pojedynczego niepodpartego pręta kratowego przyjmuje postać:

$$1 - 4 = 0 - 3, \tag{3.20}$$

co oznacza, że konstrukcja jest poprawnie zdefiniowana.



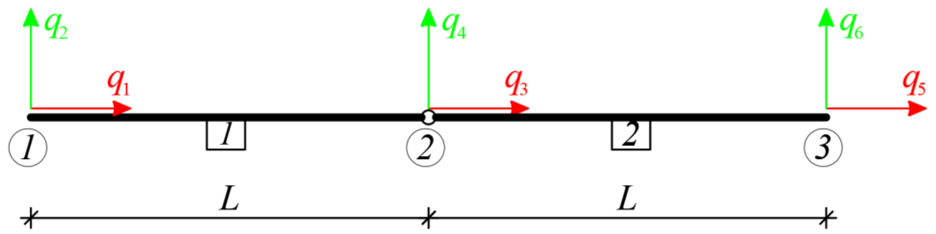
Rys. 3.4. Fizyczna interpretacja wartości i wektorów własnych płaskiego elementu kratowego

3.5.2. Niepodparta dwuelementowa struktura

Kolejnym przykładem jest struktura złożona z dwóch ($n = 2$) przegubowo połączonych elementów o sześciu stopniach swobody ($m = 6$) (rys. 3.5). Wektor przemieszczeń $\mathbf{q}$ ($\in \mathbb{R}^{6\times1}$) i macierz wydłużeń $\mathbf{B}$ ($\in \mathbb{R}^{2\times6}$) mają następującą postać:

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6]^T, \\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.21}$$

a)



Rys. 3.5. Niepodparta dwuelementowa struktura

1. Identyfikacja stanów samonaprężenia

W przypadku niepodpartej dwuelementowej struktury, macierz zgodności $\mathbf{BB}^\mathrm{T}(\in \mathbb{R}^{2\times2})$ ma postać:

$$\mathbf{BB}^\mathrm{T} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

i charakteryzuje się dwiema wartościami własnymi:

$$\mu_i = \{3 \quad 1\}. \tag{3.23}$$

Ze względu na to, że obie wartości własne są większe od zera, to dla tego przypadku nie zidentyfikowano stanu samonaprężenia ($lss = 0$).

2. Identyfikacja mechanizmów

Szczególna macierz sztywności $\mathbf{B}^\mathrm{T}\mathbf{B}(\in \mathbb{R}^{6\times6})$ w przypadku, gdy struktura nie jest podparta, ma postać:

$$\mathbf{B}^\mathrm{T}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

i charakteryzuje się sześcioma wartościami własnymi:

$$\lambda_i = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 3\} \tag{3.25}$$

którym odpowiadają następujące wektory własne:

$$\mathbf{q}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0,5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0,5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{lub} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0,5 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -0,5 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.26}$$

Po określeniu liczby stanów samonaprężenia i mechanizmów, wzór Maxwella (3.9) dla niepodpartej struktury dwuelementowej przyjmuje postać:

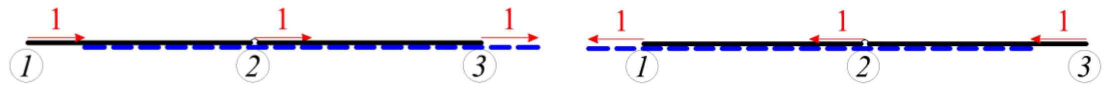
$$2 - 6 = 0 - 4, \tag{3.27}$$

co oznacza, że konstrukcja jest poprawnie zdefiniowana.

Interpretację fizyczną wektorów własnych (3.26) przedstawiono na rysunku 3.6. Dla rozpatrywanej struktury zidentyfikowano cztery mechanizmy $(lm = 4)$. Trzy pierwsze zerowe wartości własne odpowiadają ruchom sztywnym, czyli kolejno translacji w kierunkach x i y oraz obrotowi w płaszczyźnie elementu. Czwarta zerowa wartość własna odpowiada za istnienie mechanizmu, to jest takiego ruchu, który nie jest ruchem sztywnym, ale nie powoduje powstania w strukturze sił wewnętrznych. Fizyczną interpretację wektorów własnych przedstawiono na rysunku 3.6.

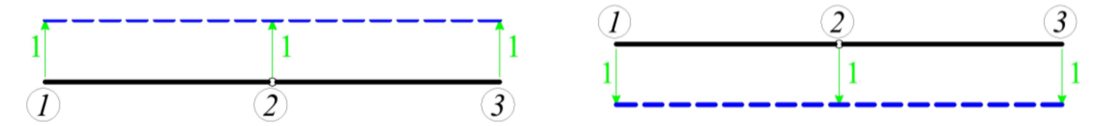
$$\lambda_1 = 0$$

$\mathbf{q}(\lambda_1) = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0]^{\mathrm{T}}$ $\qquad$ $\mathbf{q}(\lambda_1) = [-1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad -1 \quad 0]^{\mathrm{T}}$



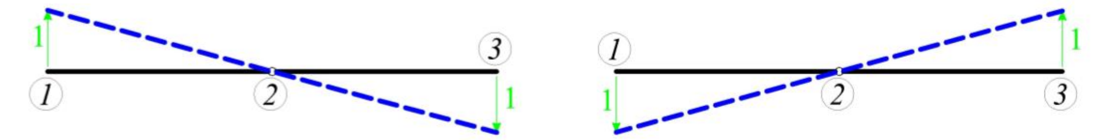
$$\lambda_2 = 0$$

$\mathbf{q}(\lambda_2) = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1]^{\mathrm{T}}$ $\qquad$ $\mathbf{q}(\lambda_2) = [0 \quad -1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad -1]^{\mathrm{T}}$



$$\lambda_3 = 0$$

$\mathbf{q}(\lambda_3) = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1]^{\mathrm{T}}$ $\qquad$ $\mathbf{q}(\lambda_3) = [0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^{\mathrm{T}}$

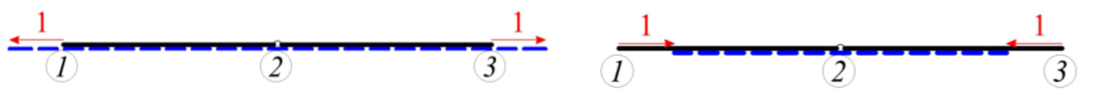


$$\lambda_4 = 0$$

$\mathbf{q}(\lambda_4) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$ $\qquad$ $\mathbf{q}(\lambda_4) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$

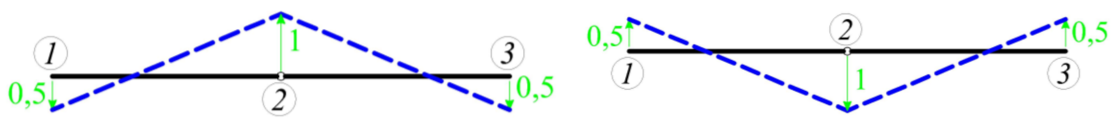
$$\lambda_5 = 1$$

$\mathbf{q}(\lambda_5) = [-1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]^{\mathrm{T}}$ $\qquad$ $\mathbf{q}(\lambda_5) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0]^{\mathrm{T}}$



$$\lambda_6 = 3$$

$\mathbf{q}(\lambda_6) = [0 \quad -0{,}5 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad -0{,}5]^{\mathrm{T}}$ $\qquad$ $\mathbf{q}(\lambda_6) = [0 \quad 0{,}5 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0{,}5]^{\mathrm{T}}$

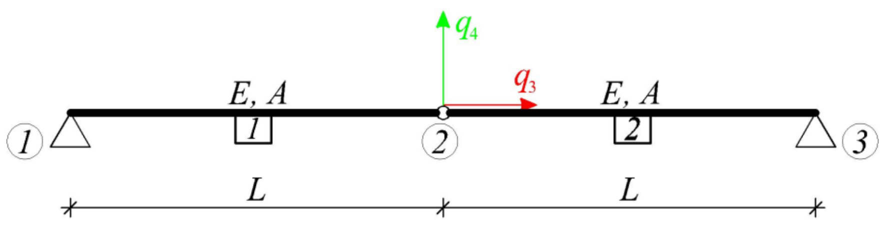


Rys. 3.6. Fizyczna interpretacja wartości i wektorów własnych niepodpartej struktury złożonej z dwóch prętów połączonych przegubowo

3.5.3. Podparta dwuelementowa struktura

W kolejnym kroku przeanalizowano tą samą konstrukcję, ale podpartą swobodnie na końcach (rys. 3.7) – w takim przypadku struktura ma dwa stopnie swobody ($m = 2$). Wektor przemieszczeń $\mathbf{q}$ ($\in \mathbb{R}^{2\times1}$) i macierz wydłużeń $\mathbf{B}$ ($\in \mathbb{R}^{2\times2}$) mają następującą postać:

$$\mathbf{q} = [q_3 \quad q_4]^{\mathrm{T}}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.28}$$



Rys. 3.7. Struktura złożona z dwóch prętów połączonych przegubowo, swobodnie podparta na końcach

1. Identyfikacja stanów samonaprężenia

W przypadku wprowadzenia swobodnego podparcia na końcach rozpatrywanej struktury, macierz zgodności $\mathbf{BB}^{\mathrm{T}}(\in \mathbb{R}^{2\times2})$ ma postać:

$$\mathbf{BB}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

i charakteryzuje się dwiema wartościami własnymi:

$$\mu_i = \{2 \quad 0\}. \tag{3.30}$$

Zerowa wartość własna odpowiadaj za istnienie stanu samonaprężenia ($lss = 1$): wektor własny odpowiadający zerowej wartości własnej ma postać:

$$\mathbf{S}(\mu_2) = [1 \quad 1] \text{ lub } [-1 \quad -1]. \tag{3.31}$$

2. Identyfikacja mechanizmów

Szczególna macierz sztywności $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}(\in \mathbb{R}^{2\times2})$ w przypadku, gdy struktura jest swobodnie podparta, ma postać:

$$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.32}$$

Swobodne podparcie likwiduje wszystkie ruchy sztywne w konstrukcji, pozostaje jedynie jedna zerowa wartość własna:

$$\lambda_i = \{0 \quad 2\}, \tag{3.33}$$

z którą skorelowany jest następujący wektor własny:

$$\mathbf{q}(\lambda_1) = [0 \quad 1] \text{ lub } [0 \quad -1]. \tag{3.34}$$

odpowiadający za możliwość przesuwu środkowego węzła w kierunku y (analogicznie jak postać $\mathbf{q}(\lambda_4)$ dla struktury niepodpartej). Występowanie jednej zerowej wartości własnej odpowiada za istnienie mechanizmu w konstrukcji ($lm = 1$).

Po określeniu liczby stanów samonaprężenia i mechanizmów, wzór Maxwella (3.9) dla swobodnie podpartej struktury dwuelementowej przyjmuje postać:

$$2 - 2 = 1 - 1, \tag{3.35}$$

co oznacza, że konstrukcja jest poprawnie zdefiniowana.

3. Identyfikacja typu mechanizmu

Istnienie stanu samonaprężenia pozwala na zbudowanie geometrycznej macierzy sztywności $\mathbf{K}_\sigma$ i możliwość sprawdzenia, czy zidentyfikowany mechanizm jest infinitezymalny. Dla rozważanego przypadku macierz $\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\sigma$ dla dodatniej formy wektora

$\mathbf{S}(\mu_2) = [1 \quad 1]$ (czyli gdy oba pręty struktury są rozciągane) ma postać:

$$\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \tag{3.36}$$

a jej wartości własne są równe:

$$\sigma = \{2 \quad 2\}. \tag{3.37}$$

i większe od zera, co świadczy o tym, że zidentyfikowany mechanizm jest stabilizowany przez stan samonaprężenia.

Przy wzięciu pod uwagę ujemnej formy wektora, tj. $\mathbf{S}(\mu_2) = [-1 \quad -1]$**,** gdy struktura jest ściskana**,** macierz $\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\sigma$ ma postać:

$$\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \tag{3.38}$$

a jej wartości własne są równe:

$$\sigma = \{-2 \quad 2\}. \tag{3.39}$$

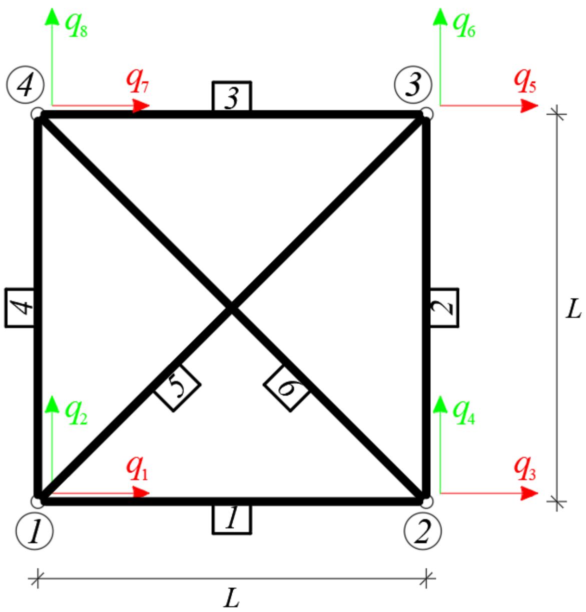
Jedna ze zidentyfikowanych wartości własnych jest mniejsza od zera, a więc w tym przypadku stan samonaprężenia nie stabilizuje zidentyfikowanego mechanizmu.

Gdy $\mathbf{S} = [0 \quad 0]$, to macierze $\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\sigma$, $\mathbf{K}_L$ oraz $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}$ są tożsame ($\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\sigma \equiv \mathbf{K}_L \equiv \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}$) i równe (3.23). Ponieważ dla $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}$ zidentyfikowano ujemną wartość własną, to struktura pozostaje mechanizmem.

3.5.4. Niepodparta kratownica typu X

Kolejną rozpatrywaną strukturą jest kratownica przedstawiona na rysunku 3.8. Podobnie jak w poprzednim przykładzie, w pierwszym kroku rozpatrzono strukturę niepodpartą. Rozważana struktura składa się z sześciu prętów ($n = 6$) i ma osiem stopni swobody ($m = 8$). Wektor przemieszczeń $\mathbf{q}$ ($\in \mathbb{R}^{8\times1}$) i macierz wydłużeń $\mathbf{B}$ ($\in \mathbb{R}^{6\times8}$) mają następującą postać:

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6 \quad q_7 \quad q_8]^{\mathrm{T}},$$
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0{,}71 & -0{,}71 & 0 & 0 & -0{,}71 & 0{,}71 \\ -0{,}71 & -0{,}71 & 0 & 0 & 0{,}71 & 0{,}71 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.40}$$



Rys. 3.8. Kratownica

1. *Identyfikacja stanów samonaprężenia*

W przypadku niepodpartej struktury, macierz zgodności $\mathbf{BB}^{\mathrm{T}}(\in \mathbb{R}^{6\times 6})$ ma postać:

$$\mathbf{BB}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0{,}71 & 0{,}71 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0{,}71 & 0{,}71 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0{,}71 & 0{,}71 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0{,}71 & 0{,}71 \\ 0{,}71 & 0{,}71 & 0{,}71 & 0{,}71 & 2 & 0{,}71 \\ 0{,}71 & 0{,}71 & 0{,}71 & 0{,}71 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \tag{3.41}$$

i charakteryzuje się następującymi wartościami własnymi:

$$\mu_i = \{4 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 0\}. \tag{3.42}$$

Z ostatnią, zerową wartością własną ($lss = 1$) skorelowany jest wektor własny w postaci:

$$\begin{gathered} \mathbf{S}(\mu_6) = [0{,}71 \quad 0{,}71 \quad 0{,}71 \quad 0{,}71 \quad -1 \quad -1] \\ \text{lub } [-0{,}71 \quad -0{,}71 \quad -0{,}71 \quad -0{,}71 \quad 1 \quad 1], \end{gathered} \tag{3.43}$$

zawierający siły stanu samonaprężenia zidentyfikowanego dla rozpatrywanej struktury. W dalszych rozważaniach wzięto pod uwagę pierwszą postać wektora, tj. przypadek, w którym zewnętrzne pręty są rozciągane i tworzą zamknięty pierścień wokół wewnętrznych prętów ściskanych.

2. *Identyfikacja mechanizmów*

Szczególna macierz sztywności $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}(\in \mathbb{R}^{8\times 8})$ w przypadku, gdy struktura nie jest podparta, ma postać:

$$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1{,}35 & 0{,}35 & -1 & 0 & -0{,}35 & -0{,}35 & 0 & 0 \\ 0{,}35 & 1{,}35 & 0 & 0 & -0{,}35 & -0{,}35 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1{,}35 & -0{,}35 & 0 & 0 & -0{,}35 & -0{,}35 \\ 0 & 0 & -0{,}35 & 1{,}35 & 0 & -1 & 0{,}35 & -0{,}35 \\ -0{,}35 & -0{,}35 & 0 & 0 & 1{,}35 & 0{,}35 & -1 & 0 \\ -0{,}35 & -0{,}35 & 0 & -1 & 0{,}35 & 1{,}35 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}35 & 0{,}35 & -1 & 0 & 1{,}35 & -0{,}35 \\ 0 & -1 & 0{,}35 & -0{,}35 & 0 & 0 & -0{,}35 & 1{,}35 \end{bmatrix} \tag{3.44}$$

i charakteryzuje się sześcioma wartościami własnymi:

$$\lambda_i = \{3{,}41 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 1{,}41 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}. \tag{3.45}$$

Trzy zidentyfikowane zerowe wartości własne świadczą o występowaniu w konstrukcji mechanizmu ($lm = 3$). Po określeniu liczby stanów samonaprężenia i mechanizmów, wzór Maxwella (3.9) przyjmuje postać:

$$6 - 8 = 1 - 3 \tag{3.46}$$

co oznacza, że konstrukcja jest poprawnie zdefiniowana.

3. Identyfikacja typu mechanizmu

Istnienie stanu samonaprężenia pozwala na zbudowanie geometrycznej macierzy sztywności $\mathbf{K}_\sigma$ i możliwość sprawdzenia, czy zidentyfikowany mechanizm jest infinitezymalny. Dla rozważanego przypadku przyjęto wektor stanu samonaprężenia równy $\mathbf{S}(\mu_6) = [0{,}71 \quad 0{,}71 \quad 0{,}71 \quad 0{,}71 \quad -1 \quad -1]$, macierz $\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\sigma (\in \mathbb{R}^{8\times8})$ ma postać:

$$\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\sigma$$
$$= \begin{bmatrix} 1{,}71 & 0{,}71 & -1{,}0 & 0 & 0 & -0{,}71 & -0{,}71 & 0 \\ 0{,}71 & 1{,}71 & 0 & -0{,}71 & -0{,}71 & 0 & 0 & -1{,}0 \\ -1{,}0 & 0 & 1{,}71 & -0{,}71 & -0{,}71 & 0 & 0 & 0{,}71 \\ 0 & -0{,}71 & -0{,}71 & 1{,}71 & 0 & -1{,}0 & 0{,}71 & 0 \\ 0 & -0{,}71 & -0{,}71 & 0 & 1{,}71 & 0{,}71 & -1{,}0 & 0 \\ -0{,}71 & 0 & 0 & -1{,}0 & 0{,}71 & 1{,}71 & 0 & -0{,}71 \\ -0{,}71 & 0 & 0 & 0{,}71 & -1{,}0 & 0 & 1{,}71 & -0{,}71 \\ 0 & -1{,}0 & 0{,}71 & 0 & 0 & -0{,}71 & -0{,}71 & 1{,}71 \end{bmatrix}, \tag{3.47}$$

a jej wartości własne są równe:

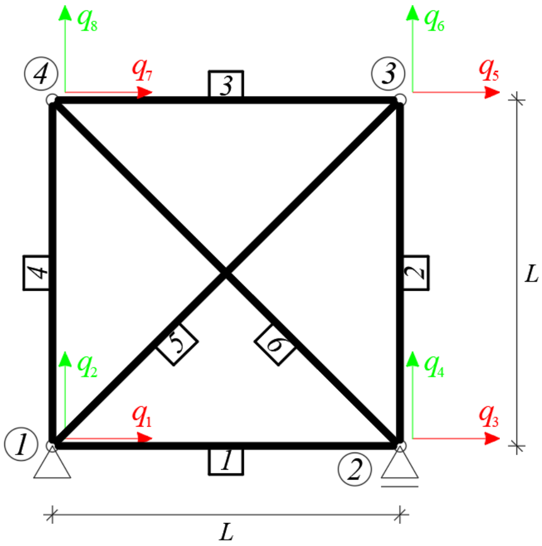
$$\sigma = \{3{,}41 \quad 3{,}41 \quad 3{,}41 \quad 2{,}83 \quad 0{,}59 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}. \tag{3.48}$$

Trzy ostatnie wartości są równe zero, więc przyjęty stan samonaprężenia nie stabilizuje mechanizmu.

3.5.5. Podparta kratownica typu X

W kolejnym kroku rozpatrywaną kratownicę podparto (rys.3.9). Rozważana struktura tym razem ma pięć stopni swobody ($m = 5$). Wektor przemieszczeń $\mathbf{q}$ ($\in \mathbb{R}^{5\times1}$) i macierz wydłużeń $\mathbf{B}$ ($\in \mathbb{R}^{6\times5}$) mają następującą postać:

$$\mathbf{q} = [q_3 \quad q_5 \quad q_6 \quad q_7 \quad q_8]^{\mathrm{T}},$$
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0{,}71 & 0 & 0 & -0{,}71 & 0{,}71 \\ 0 & 0{,}71 & 0{,}71 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.49}$$



Rys. 3.9. Kratownica

1. Identyfikacja stanów samonaprężenia

W przypadku struktury podpartej, macierz zgodności $\mathbf{BB}^{\mathrm{T}}(\in \mathbb{R}^{6\times6})$ ma postać:

$$\mathbf{BB}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1{,}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}71 \\ 0 & 1{,}0 & 0 & 0 & 0{,}71 & 0 \\ 0 & 0 & 2{,}0 & 0 & 0{,}71 & 0{,}71 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}0 & 0 & 0{,}71 \\ 0 & 0{,}71 & 0{,}71 & 0 & 1{,}0 & 0 \\ 0{,}71 & 0 & 0{,}71 & 0{,}71 & 0 & 1{,}5 \end{bmatrix}. \tag{3.50}$$

Dla powyższej macierzy zidentyfikowano istnienie jednej zerowej wartości własnej, odpowiadającej za istnienie stanu samonaprężenia ($lss = 1$):

$$\mu_i = [2{,}89 \quad 2{,}0 \quad 1{,}35 \quad 1{,}0 \quad 0{,}255 \quad 0], \tag{3.51}$$

Wektor własny odpowiadający zerowej wartości własnej ma taką samą postać, jak dla struktury niepodpartej:

$$\begin{gathered} \mathbf{S}(\mu_6) = [0{,}71 \quad 0{,}71 \quad 0{,}71 \quad 0{,}71 \quad -1 \quad -1] \\ \text{lub } [-0{,}71 \quad -0{,}71 \quad -0{,}71 \quad -0{,}71 \quad 1 \quad 1], \end{gathered} \tag{3.52}$$

W dalszych rozważaniach wzięto pod uwagę pierwszą postać wektora, tj. przypadek, w którym zewnętrzne pręty są rozciągane i tworzą zamknięty pierścień wokół wewnętrznych prętów ściskanych.

2. Identyfikacja mechanizmów

Szczególna macierz sztywności $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}(\in \mathbb{R}^{5\times5})$ w przypadku, gdy struktura nie jest podparta, ma postać:

$$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1{,}35 & 0 & 0 & -0{,}35 & 0{,}35 \\ 0 & 1{,}35 & 0{,}35 & -1{,}0 & 0 \\ 0 & 0{,}35 & 1{,}35 & 0 & 0 \\ -0{,}35 & -1{,}0 & 0 & 1{,}35 & -0{,}35 \\ 0{,}35 & 0 & 0 & -0{,}35 & 1{,}35 \end{bmatrix}. \tag{3.53}$$

Swobodne podparcie likwiduje mechanizm występujący w konstrukcji i wszystkie otrzymane wartości własne dla macierzy $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}$ są większe od zera ($lm = 0$):

$$\lambda_i = [2{,}56 \quad 1{,}71 \quad 1{,}28 \quad 1 \quad 0{,}21], \tag{3.54}$$

Po określeniu liczby stanów samonaprężenia i mechanizmów, wzór Maxwella (3.9) przyjmuje postać:

$$6 - 5 = 1 - 0 \tag{3.55}$$

co oznacza, że konstrukcja jest poprawnie zdefiniowana.

3.5.6. Podsumowanie

Przeprowadzenie oceny jakościowej umożliwia klasyfikację płaskich struktur ze względu na występowanie sześciu charakterystycznych cech według podziału zaproponowanego w rozdziale 3.4. Rezultaty przedstawiono w tabeli 3.2. Poza ostatnim przykładem, podpartą kratownicą typu X, zaliczoną do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 2, pozostałe struktury nie są tensegrity.

Tabela 3.2. *Klasyfikacja płaskich struktur*

Struktura	***Cecha tensegrity***						***Klasyfikacja***
	K	***S***	***M***	***C***	***W***	***N***	
niepodparty pojedynczy element kratowy	+	–	–	+	–	–	nie tensegrity
niepodparta dwuelementowa struktura	+	–	–	+	–	–	nie tensegrity
podparta dwuelementowa struktura	+	+	$\frac{+}{-}$	$\frac{+}{-}$	–	–	nie tensegrity
niepodparta kratownica typu X	+	–	–	+	+	+	nie tensegrity
podparta kratownica typu X	+	+	–	+	+	+	konstrukcja o cechach tensegrity klasy 2

ROZDZIAŁ 4.

MODEL MATEMATYCZNY STRUKTUR TENSEGRITY

4.1. Wprowadzenie

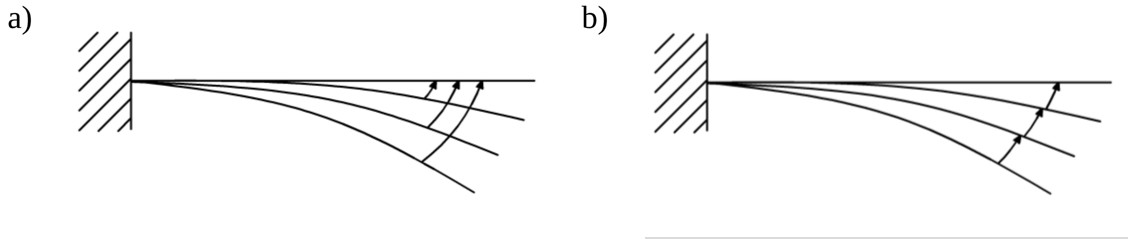
Systemy tensegrity są przestrzennymi kratowymi systemami znajdującymi się w stanie samonaprężenia. Struktury te składają się z napiętych cięgien, które nie mają sztywności na ściskanie i z zastrzałów. Wszystkie elementy są prostoliniowe i są porównywalnej długości. Specyfika tensegrity polega na tym, że występujące w nich stany samonaprężenia stabilizują istniejące nieskończenie małe mechanizmy. Druga istotna cecha tych systemów dotyczy wielkości przemieszczeń, które mogą być duże, nawet jeśli odkształcenia są małe. Kompletna analiza struktur tensegrity zawiera ocenę jakościową i ilościową. W pierwszym etapie identyfikowane są cechy charakterystyczne struktur tensegrity. Jest to ważny aspekt w kontekście kolejnego kroku, czyli analizy ilościowej, ponieważ struktury zaliczone do różnych kategorii zachowują się inaczej pod wpływem oddziaływań zewnętrznych. Drugi etap koncentruje się właśnie na analizie zachowania się układów tensegrity pod wpływem obciążeń. W szczególności rozpatrywany jest wpływ poziomu stanu samonaprężenia na przemieszczenia, wytężenie i sztywność konstrukcji.

Ze względu na specyficzną budowę analiza ilościowa dwuwarstwowych kratownic tensegrity mogą być przeprowadzana przy użyciu modelu dyskretnego lub modelu kontynualnego. W pierwszym podejściu struktura jest analizowana za pomocą metody elementów skończonych, natomiast w modelu kontynualnym – z wykorzystaniem mechaniki ciał stałych. Najbardziej popularne jest pierwsze podejście [Wang, 1998; Kono *i in.*, 1999; Gomez-Jauregui *i in.*, 2012; Crawford, 2015; Gilewski *i in.*, 2016; Obara i Tomasik, 2021a]. Jednak w przypadku dużych konstrukcji analiza z wykorzystaniem metody elementów skończonych wymaga znacznej mocy obliczeniowej. Ponadto, w przypadku konstrukcji charakteryzujących się mechanizmami zastosowanie komercyjnych programów komputerowych jest problematyczne, a w przypadku programów inżynierskich wręcz niemożliwe. W związku z powyższym, równoważna technika modelowania kontynualnego ma obiecujące zalety. Dzięki zmniejszeniu liczby stopni swobody model kontynualny jest praktycznym i wydajnym podejściem do analizy dużych konstrukcji. Jest również łatwą metodą porównywania charakterystyk konstrukcji o różnych konfiguracjach i oceniania ich reakcji na zmiany właściwości materiałowych i geometrycznych. Ponadto to podejście jest efektywnym narzędziem do projektowania systemów kontroli konstrukcji tensegrity. Dzieje się tak dlatego, że w takich sytuacjach interesujące jest tylko globalne zachowanie konstrukcji, a szczegółowe informacje o każdym elemencie nie są potrzebne.

4.2. Geometrycznie nieliniowy model dyskretny

W pracy do opisu zachowania konstrukcji tensegrity zastosowano model geometrycznie nieliniowy, uwzględniający duże gradienty przemieszczeń z zachowaniem niewielkich gradientów odkształceń [Timoshenko i Goodier, 1962; Fung, 1969; Nowacki, 1970; Bathe, 1982; Kleiber, 1985; Wawszczyn *i in.*, 1990; Crisfield, 1991; Wawszczyn i Cichoń, 1995; Rakowski, 1996; Marcinkowski, 1999; Podhorecki, 2005; Rakowski i Kasprzyk, 2005; Radoń, 2012; Borst *i in.*, 2012; Neimitz, 2016]. Specyfikę pracy systemów tensegrity, a mianowicie występowanie stanów samonaprężenia, stabilizujących struktury tensegrity, uwzględniono poprzez wprowadzenie do przyjętego modelu warunku początkowych naprężeń [Argyris i Scharpf, 1972; Motro, 1984; Kebiche *i in.*, 1999; Pagitz i Mirats Tur, 2009; Tran i Lee, 2011; Faroughi i Lee, 2014b]. Do modelowania struktury tensegrity zastosowano zmodyfikowany kratowy przestrzenny element skończony (element tensegrity). Modyfikacja elementu uwzględnienia występowanie w konfiguracji początkowej wstępnych naprężeń wywołanych stanem samonaprężenia.

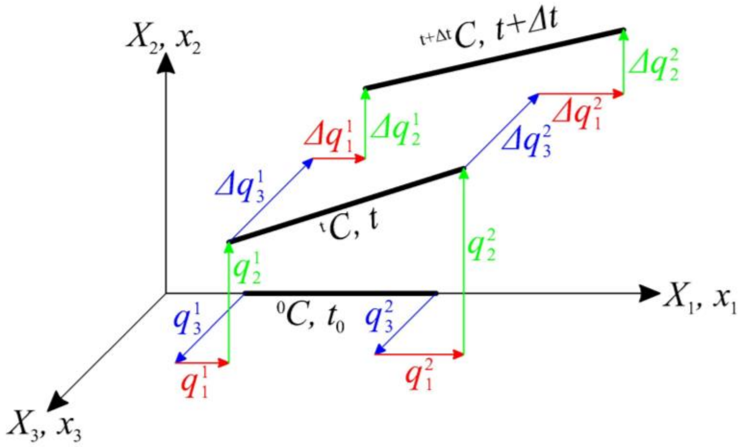
Jako podstawę do sformułowania równań kratownic tensegrity przyjęto częściowo nieliniową teorię sprężystości w ujęciu *Total Lagrangian – TL* (stacjonarny opis Lagrange'a, rys. 4.1a), w której, w odróżnieniu od opisu *Updated Lagrangian* (zaktualizowany opis Lagrange'a, rys. 4.1b), odkształcenie i naprężenia są zdefiniowane w odniesieniu do nieodkształconej postaci konstrukcji.



Rys. 4.1. a) stacjonarny opis Lagrange'a, b) zaktualizowany opis Lagrange'a

4.2.1. Element tensegrity

Równania równowagi statycznej skończonego elementu tensegrity w kartezjańskim prawoskrętnym układzie współrzędnych (x_1, x_2, x_3) można zapisać w wersji przyrostowej lub nieprzyrostowej. W tym celu rozpatrywany jest element w trzech konfiguracjach – jednej niezdeformowanej (początkowej) ${}^{0}C$ i dwóch zdeformowanych (aktualnych) ${}^{t}C\ i\ {}^{t+\Delta t}C$ (rys. 4.2). W konfiguracji początkowej długość elementu i pole przekroju wynoszą odpowiednio l_0 i A_0, natomiast w konfiguracji zdeformowanej – l i A.



Rys. 4.2. Przestrzenny skończony element tensegrity

Równanie równowagi statycznej w wersji nieprzyrostowej jest formułowane dla konfiguracji aktualnej w chwili t $({}^{t}C)$ i ma postać:

$$\mathbf{K}_S^e(\mathbf{q})\,{}^{t}\mathbf{q}^e - {}^{t}\mathbf{Q}^e + \mathbf{F}_0^e = \mathbf{0}, \tag{4.1}$$

gdzie:

${}^{t}\mathbf{q}^e -$ wektor współrzędnych węzłowych:

$${}^{t}\mathbf{q}^e = [q_1^1 \quad q_2^1 \quad q_3^1 \quad q_1^2 \quad q_2^2 \quad q_3^2], \tag{4.2}$$

${}^{t}\mathbf{Q}^{e}$ – wektor sił węzłowych:

$$ {}^{t}\mathbf{Q}^{e} = [Q_1^1 \quad Q_2^1 \quad Q_3^1 \quad Q_1^2 \quad Q_2^2 \quad Q_3^2], \tag{4.3}$$

$\mathbf{F}_0^e$ – wektor sił wewnętrznych:

$$\mathbf{F}_0^e = S\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \tag{4.4}$$

$\mathbf{K}_S^e(\mathbf{q})$ – sieczna macierz sztywności:

$$\mathbf{K}_S^e(\mathbf{q}) = \mathbf{K}_L^e(\mathbf{q}) + \mathbf{K}_\sigma^e(S) + \mathbf{K}_{N,NL}^e(\mathbf{q}), \tag{4.5}$$

przy czym:

$\mathbf{K}_L^e(\mathbf{q})$ – macierz sztywności liniowej:

$$\mathbf{K}_L^e(\mathbf{q}) = \frac{EA_0}{l_0}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \tag{4.6}$$

$\mathbf{K}_\sigma^e(S)$ – macierz naprężeń wstępnych, uwzględniająca wpływ stanu samonaprężenia S:

$$\mathbf{K}_\sigma^e(S) = \frac{S}{l_0}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1\\-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \tag{4.7}$$

$\mathbf{K}_{N,NL}^e(\mathbf{q})$ – niesymetryczna macierz sztywności przemieszczeniowej:

$$\mathbf{K}_{N,NL}^e(\mathbf{q}) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{K}_{N,u1}^e + \mathbf{K}_{u2}^e\right), \tag{4.8}$$

przy czym:

$$\mathbf{K}_{N,u1}^e = \frac{EA_0}{l_0^2}\begin{bmatrix}3\Delta_{u_1} & \Delta_{u_2} & \Delta_{u_3} & -3\Delta_{u_1} & -\Delta_{u_2} & -\Delta_{u_3}\\2\Delta_{u_2} & 0 & 0 & -2\Delta_{u_2} & 0 & 0\\2\Delta_{u_3} & 0 & 0 & -2\Delta_{u_3} & 0 & 0\\-3\Delta_{u_1} & -\Delta_{u_2} & -\Delta_{u_3} & 3\Delta_{u_1} & \Delta_{u_2} & \Delta_{u_3}\\-2\Delta_{u_2} & 0 & 0 & 2\Delta_{u_2} & 0 & 0\\-2\Delta_{u_3} & 0 & 0 & 2\Delta_{u_3} & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{4.9}$$

oraz

$$\mathbf{K}_{u2}^{e} = \frac{EA_0}{l_0^3}\begin{bmatrix} (\Delta_{u_1})^2 & \Delta_{u_1}\Delta_{u2} & \Delta_{u_1}\Delta_{u_3} & -(\Delta_{u1})^2 & -\Delta_{u_1}\Delta_{u_2} & -\Delta_{u_1}\Delta_{u_3} \\ \Delta_{u_1}\Delta_{u2} & (\Delta_{u_2})^2 & \Delta_{u_2}\Delta_{u3} & -\Delta_{u1}\Delta_{u_2} & -(\Delta_{u2})^2 & -\Delta_{u_2}\Delta_{u_3} \\ \Delta_{u_1}\Delta_{u_3} & \Delta_{u_2}\Delta_{u_3} & (\Delta_{u_3})^2 & -\Delta_{u1}\Delta_{u_3} & -\Delta_{u_2}\Delta_{u_3} & -(\Delta_{u_3})^2 \\ -(\Delta_{u_1})^2 & -\Delta_{u_1}\Delta_{u2} & -\Delta_{u_1}\Delta_{u_3} & (\Delta_{u_1})^2 & \Delta_{u_1}\Delta_{u_2} & \Delta_{u_1}\Delta_{u_3} \\ -\Delta_{u_1}\Delta_{u2} & -(\Delta_{u_2})^2 & -\Delta_{u_2}\Delta_{u_3} & \Delta_{u_1}\Delta_{u_2} & (\Delta_{u_2})^2 & \Delta_{u_2}\Delta_{u_3} \\ -\Delta_{u_1}\Delta_{u_3} & -\Delta_{u_2}\Delta_{u_3} & -(\Delta_{u_3})^2 & \Delta_{u_1}\Delta_{u_3} & \Delta_{u_2}\Delta_{u_3} & (\Delta_{u_3})^2 \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

gdzie:

$$\Delta_{u_i} = q_i^2 - q_i^1; \;\; i = 1,2,3. \quad (4.11)$$

Równanie równowagi statycznej w wersji przyrostowej jest formułowane dla konfiguracji aktualnej w chwili $t + \Delta t$ $({}^{t+\Delta t}C)$ i ma postać:

$$\mathbf{K}_T^e(\mathbf{q})\Delta\mathbf{q}^e = \mathbf{R}^e + \Delta\mathbf{Q}^e, \quad (4.12)$$

gdzie:

$\Delta\mathbf{q}^e -$ wektor przyrostów przemieszczeń:

$${}^t\mathbf{q}^e = [\Delta q_1^1 \quad \Delta q_2^1 \quad \Delta q_3^1 \quad \Delta q_1^2 \quad \Delta q_2^2 \quad \Delta q_3^2], \quad (4.13)$$

$\Delta\mathbf{Q}^e -$ wektor przyrostów sił węzłowych:

$${}^t\mathbf{Q}^e = [\Delta Q_1^1 \quad \Delta Q_2^1 \quad \Delta Q_3^1 \quad \Delta Q_1^2 \quad \Delta Q_2^2 \quad \Delta Q_3^2], \quad (4.14)$$

$\mathbf{R}^e -$ wektor sił residualnych:

$$\mathbf{R}^e = {}^t\mathbf{Q}^e - \mathbf{F}^e, \quad (4.15)$$

przy czym:

$\mathbf{F}^e$ – wektor sił wewnętrznych w chwili $t + \Delta t$,

$\mathbf{K}_T^e(\mathbf{q}) -$ styczna macierz sztywności:

$$\mathrm{K}_T^e(\mathbf{q}) = \mathrm{K}_L^e(\mathbf{q}) + \mathrm{K}_\sigma^e(S+N) + \mathrm{K}_{NL}^e(\mathbf{q}), \quad (4.16)$$

przy czym:

$\mathbf{K}_\sigma^e(S+N) -$ macierz sztywności naprężeniowej, uwzględniającej wpływ stanu samonaprężenia S oraz sił normalnych N:

$$\mathbf{K}_\sigma^e(S+N) = \frac{S+N}{l_0}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

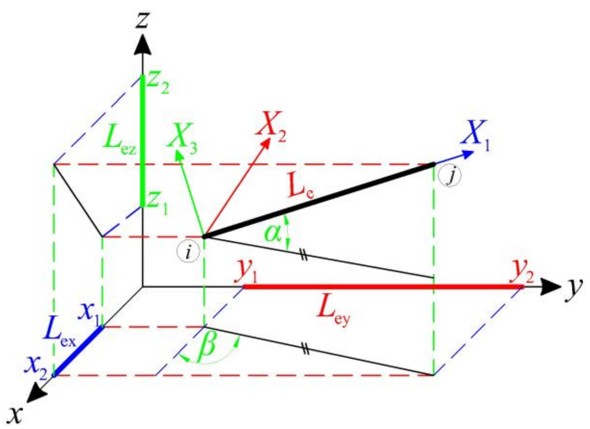
$\mathbf{K}_{NL}^e(\mathbf{q}) -$ symetryczna macierz sztywności przemieszczeniowej:

$$\mathbf{K}_{NL}^{e}(\mathbf{q}) = \mathbf{K}_{u1}^{e} + \mathbf{K}_{u2}^{e}, \tag{4.18}$$

przy czym:

$$\mathbf{K}_{u1}^{e} = \frac{EA_0}{l_0^2}\begin{bmatrix} 2\Delta_{u_1} & \Delta_{u_2} & \Delta_{u_3} & -2\Delta_{u_1} & -\Delta_{u_2} & -\Delta_{u_3} \\ \Delta_{u_2} & 0 & 0 & -\Delta_{u_2} & 0 & 0 \\ \Delta_{u_3} & 0 & 0 & -\Delta_{u_3} & 0 & 0 \\ -2\Delta_{u_1} & -\Delta_{u_2} & -\Delta_{u_3} & 2\Delta_{u_1} & \Delta_{u_2} & \Delta_{u_3} \\ -\Delta_{u_2} & 0 & 0 & \Delta_{u_2} & 0 & 0 \\ -\Delta_{u_3} & 0 & 0 & \Delta_{u_3} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.19}$$

4.2.2. Transformacja układu współrzędnych



Rys. 4.3. Transformacja z układu lokalnego (x_1, x_2, x_3) do układu globalnego (x, y, z)

Wektor współrzędnych węzłowych $\mathbf{q}^e$, tak jak i wektor sił węzłowych $\mathbf{Q}^e$, skończonego elementu tensegrity odnoszą się do układu lokalnego (x_1, x_2, x_3) związanego z początkowym położeniem elementu. Analiza struktur tensegrity wymaga odniesienia do jednego, globalnego układu współrzędnych (x, y, z). W związku z powyższym parametry geometryczne $\mathbf{q}^e = \mathbf{q}^e(x_1, x_2, x_3)$ oraz statyczne $\mathbf{Q}^e = \mathbf{Q}^e(x_1, x_2, x_3)$, należy transformować z układu lokalnego do układu globalnego (rys. 4.3) ($\bar{\mathbf{q}}^e = \bar{\mathbf{q}}^e(x, y, z)$, $\bar{\mathbf{Q}}^e = \bar{\mathbf{Q}}^e(x, y, z)$):

$$\mathbf{q}^e = \mathbf{T}^e\bar{\mathbf{q}}^e; \quad \mathbf{Q}^e = \mathbf{T}^e\bar{\mathbf{Q}}^e, \tag{4.20}$$

gdzie:

$\mathbf{T}^e$ – macierz transformacji:

$$\mathbf{T}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_1 \end{bmatrix}; \ \mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) & \cos(\alpha)\sin(\beta) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ -\sin(\alpha)\cos(\beta) & -\sin(\alpha)\sin(\beta) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}, \tag{4.21}$$

przy czym:

$$\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{L_{ex}^2 + L_{ey}^2}}{L_e}, \qquad \sin(\alpha) = \frac{L_{ez}}{L_e},$$
$$\sin(\beta) = \frac{L_{ey}}{\sqrt{L_{ex}^2 + L_{ey}^2}}, \qquad \cos(\beta) = \frac{L_{ex}}{\sqrt{L_{ex}^2 + L_{ey}^2}}, \tag{4.22}$$
$$L_{ex} = x_2 - x_1, \qquad L_{ey} = y_2 - y_1, \qquad L_{ez} = z_2 - z_1.$$

Znajomość praw transformacji (4.20) pozwala określić transformacje macierzy sztywności oraz wektorów sił wewnętrznych:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{K}}^e &= (\mathbf{T}^e)^T \mathbf{K}^e \mathbf{T}^e, \\ \overline{\mathbf{F}}^e &= (\mathbf{T}^e)^T \mathbf{F}^e. \end{aligned} \tag{4.23}$$

4.2.3. Struktury tensegrity

Rozważana jest płaska i przestrzenna struktura tensegrity, będąca kratownicą, złożona z n elementów o m stopniach swobody:

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_m]^T. \tag{4.24}$$

Analogicznie jak w przypadku pojedynczego skończonego elementu tensegrity, strukturę rozważać można w konfiguracjach nieprzyrostowej i przyrostowej. W wersji nieprzyrostowej równanie równowagi konstrukcji tensegrity ma postać:

$$\mathbf{K}_S(\mathbf{q})\,\mathbf{q} = \mathbf{P}, \tag{4.25}$$

gdzie:

$\mathbf{K}_S(\mathbf{q})$ – globalna sieczna macierz sztywności,

$\mathbf{P}$ – wektor obciążeń zewnętrznych.

W wersji przyrostowej równanie równowagi przedstawić można następująco:

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{q})\Delta\mathbf{q} = \Delta\mathbf{P} + \mathbf{R}, \tag{4.26}$$

gdzie:

$\mathbf{K}_T(\mathbf{q})$ – globalna styczna macierz sztywności,

$\mathbf{R}$ – wektor sił residualnych,

$\Delta\mathbf{P}$ – wektor przyrostów obciążeń zewnętrznych.

Do rozwiązywania równań (4.25) i (4.26) zastosować można metodę Newtona-Raphsona (metoda Newtona, metoda stycznych) [Rakowski i Kasprzyk, 2005; Szymkiewicz, 2010]. Jest to algorytm iteracyjny, zakładający, że szukany jest pierwiastek x_0 funkcji $f(x)$ w przedziale $[a, b]$, czyli że $f(x_0) = 0$. Przyjmuje się także, że w przedziale $[a, b]$ istnieje tylko jeden pierwiastek funkcji, funkcja ma różne znaki na końcach przedziału (czyli $f(a) \cdot f(b) < 0$) oraz pierwsza i druga pochodna funkcji nie zmieniają znaku w zadanym przedziale. Iterację zaczyna się w wybranym punkcie x_1 (zazwyczaj x_1 przyjmuje wartość $a, b, 0$ lub 1), przez który przeprowadza się styczną do funkcji $f(x)$. Punkt przecięcia stycznej z osią X jest punktem startowym kolejnego przybliżenia. Operację przeprowadza się do uzyskania dostatecznej dokładności pierwiastka funkcji x_0.

4.3. Sześcioparametrowa teoria powłok

Skomplikowana geometria oraz występowanie stanu samonaprężenia i mechanizmów, uniemożliwiających zastosowanie komercyjnych programów komputerowych, skutecznie utrudnia stosowanie struktur tensegrity w konstrukcjach inżynierskich. Jednym ze sposobów uniknięcia wymienionych problemów jest odejście od modelu dyskretnego. Jest to możliwe np. w przypadku płyt typu tensegrity. Do płyt tensegrity można zastosować model kontynualny i wykorzystać teorię płyt lub powłok. W pracy podjęto próbę analizowania zachowania się ortotropowych płyt typu tensegrity i w tym celu wykorzystano sześcioparametrową teorię powłok [Burzyński *i in.*, 2014; Pietraszkiewicz i Konopińska, 2014; Bîrsan i Neff, 2014; Daszkiewicz *i in.*, 2014].

W rozważaniach przyjęto założenie małych przemieszczeń i obrotów, co pozwala ograniczyć rozważania do teorii liniowej, w której związek fizyczny ma postać [German, 2001; Al Sabouni-Zawadzka *i in.*, 2016; Gilewski *i in.*, 2019a; Obara, 2019b]:

$$S_{ij} = D_{ijkl} E_{kl}, \tag{4.27}$$

gdzie:

S_{ij} – składowe tensora naprężeń,

D_{ijkl} – elementy macierzy sztywności,

E_{kl} – składowe tensora odkształceń.

Macierz sztywności D_{ijkl} zawiera 36 elementów, przy czym uwzględniając symetrię, dla najogólniejszego przypadku, czyli anizotropii liczba niezależnych elementów wynosi 21. Równanie (4.27) można zapisać w postaci macierzowej, stosując notację Voighta:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{12} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \\ d_{14} & d_{24} & d_{34} & d_{44} & d_{45} & d_{46} \\ d_{15} & d_{25} & d_{35} & d_{45} & d_{55} & d_{56} \\ d_{16} & d_{26} & d_{36} & d_{46} & d_{56} & d_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}, \tag{4.28}$$

gdzie:

σ_i – elementy wektora naprężeń,

d_{ij} – elementy macierzy sztywności,

ε_i – elementy wektora odkształceń.

Przy założeniu ortotropii płyty, czyli istnienia trzech wzajemnie prostopadłych płaszczyzn symetrii, względem których własności materiałowe pozostają niezmienne, liczba różnych elementów macierzy sztywności wynosi 9, a związek fizyczny (4.28) ma postać:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & 0 & 0 & 0 \\ d_{12} & d_{22} & d_{23} & 0 & 0 & 0 \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}. \tag{4.29}$$

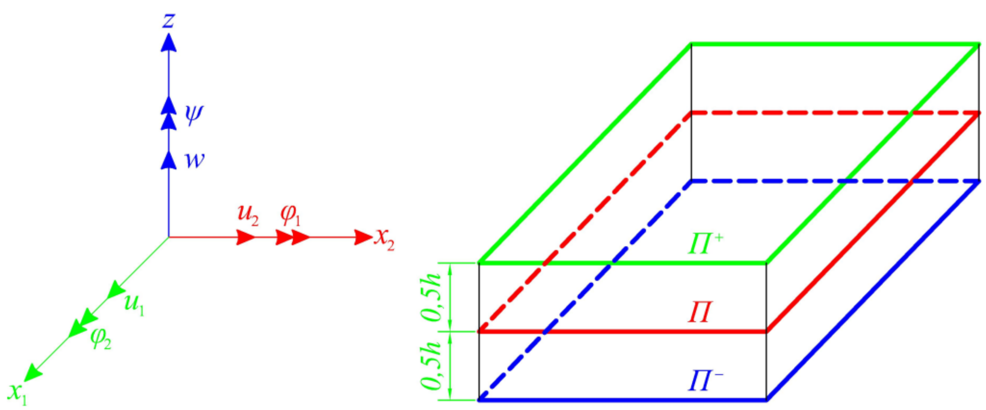
Dwuwarstwowe kratownice, jakimi są płyty zbudowane z modułów tensegrity, rozważać należy jako płyty średniej grubości. Bazując na teorii Reissnera-Mindlina [Baron, 2002], w opisie pominięto σ_3, w związku z czym liczbę niezależnych składowych stanu naprężenia i odkształcenia ograniczyć można do 5. W związku z tym zależność (4.29) ostatecznie zapisać można w postaci:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 & 0 & 0 \\ d_{12} & d_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}. \tag{4.30}$$

4.3.1. Płyty ortotropowe

W pracy do rozważań przyjęto prostokątną płytę ortotropową o stałej grubości h w układzie kartezjańskim (x_1, x_2, z) (rys. 4.4). Zwykle element płytowy sprowadza się do płaszczyzny środkowej i zakłada się, że w tej płaszczyźnie jest on podparty. W przypadku płyt tensegrity takie podejście jest niewłaściwe, gdyż miejsce podparcia może zadecydować o wystąpieniu bądź braku stanu samonaprężenia w strukturze. Z tego względy niezbędne jest uwzględnienie w rozważaniach trzech płaszczyzn odniesienia – dolnej Ω^L, środkowej Ω^M oraz górnej Ω^U:

$$\begin{aligned} \Omega^L &= \{x_k : (x_1, x_2) \in \Pi^-, z = \langle 0; h \rangle\}, \\ \Omega^M &= \left\{x_k : (x_1, x_2) \in \Pi, z = \left\langle -\frac{h}{2}; \frac{h}{2} \right\rangle\right\}, \\ \Omega^U &= \{x_k : (x_1, x_2) \in \Pi^+, z = \langle -h; 0 \rangle\}. \end{aligned} \tag{4.31}$$



Rys. 4.4. Geometria modelu płyty

Dla przyjętego modelu płyty równanie konstytutywne (4.30) ma postać:

$$\mathbf{S} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{4.32}$$

gdzie:

S – pole naprężeń:

$$\mathbf{S}(x_1,\, x_2) = [S_1 \quad S_2 \quad S_4 \quad S_5 \quad S_6]^T, \tag{4.33}$$

D – macierz sztywności,

ε – pole odkształceń:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x_1,\, x_2) = [E_1 \quad E_2 \quad 2E_4 \quad 2E_5 \quad 2E_6]^T, \tag{4.34}$$

przy czym:

$$\begin{aligned} E_1 &= \gamma_{11} + z\kappa_{11}, \\ E_2 &= \gamma_{22} + z\kappa_{22}, \\ 2E_4 &= \gamma_{23} + z\kappa_{23}, \\ 2E_5 &= \gamma_{13} + z\kappa_{13}, \\ 2E_6 &= \gamma_{12} + \gamma_{21} + z\kappa_{12} + z\kappa_{21}. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Do rozważań zastosowano sześcioparametrową teorię powłok, która, w odróżnieniu od klasycznego ujęcia teorii płyt średniej grubości Reissnera-Mindlina, uwzględnia dodatkowo tzw. kąt owinięcia ψ (kąt obrotu wokół osi z). W związku z powyższym, korzystając z hipotezy kinematycznej Hencky'ego-Boole'a, opis pola przemieszczeń można zapisać w postaci:

$$\tilde{\mathbf{u}}(x_\alpha, z) = \mathbf{u}(x_\alpha) + z\boldsymbol{\beta}(x_\alpha); \quad \alpha = 1,2. \tag{4.36}$$

gdzie:

$$\mathbf{u}(x_1,\, x_2) = [u_1 \quad u_2 \quad w]^T \tag{4.37}$$

$$\boldsymbol{\beta}(x_1,\, x_2) = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \psi]^T \tag{4.38}$$

W rozważaniach uwzględniono działanie sił masowych (f_1, f_2, f_3), momentów zginających (m_1, m_2) oraz momentu skręcającego (m_3), wobec czego wektor obciążeń zewnętrznych ma postać:

$$\mathbf{Q}(x_1,\, x_2) = -[f_1 \quad f_2 \quad m_3 \quad m_1 \quad m_2 \quad f_3]^T. \tag{4.39}$$

W pracy sześcioparametrowa teoria powłok zastosowana została do opisu płyt, stąd w dalszej części przyjęto, że tensory krzywizn $b_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\lambda}$ przyjmują wartości zero ($b_{\alpha\beta} = 0$ i $b_{\alpha\lambda} = 0$). Dodatkowo w rozważaniach uwzględniono współczynniki korekcyjne ścinania α_i $(i = 0, 1, 2)$.

Pomiędzy przemieszczeniami (4.36), odkształceniami (4.34), naprężeniami (4.33) i obciążeniami (4.39) zachodzą odpowiednio zależności geometryczne, fizyczne i statyczne, które w postaci zredukowanej (gdzie: $\alpha, \beta, \lambda = 1, 2$) i rozwiniętej zostały przedstawione odpowiednio w tabelach 1 – 3. Użyty w zapisie zredukowanym symbol $\epsilon_{\alpha\beta}$ jest dwuwektorem Ricciego i przyjmuje następujące wartości:

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0; \quad \epsilon_{12} = 1; \quad \epsilon_{21} = -1, \tag{4.40}$$

a parametry $h_i (i = 0, 1, 2)$ zależą od przyjętej płaszczyzny odniesienia.

Tabela 4.1. *Związki geometryczne*

	zapis wskaźnikowy	postać rozwinięta		
tensor opisujący deformację membranową	$\gamma_{\alpha\beta} = u_{\alpha,\beta} - b_{\alpha\beta}w - \epsilon_{\alpha\beta}\psi$	$\gamma_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$ $\gamma_{21} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \psi$	$\gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \psi$ $\gamma_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$	(4.41)
tensor krzywizn i deformacji	$\kappa_{\alpha\beta} = \phi_{\alpha,\beta} - \epsilon_{\beta\lambda}b_{\lambda\alpha}\psi$	$\kappa_{11} = \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}$ $\kappa_{21} = \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1}$	$\kappa_{12} = \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}$ $\kappa_{22} = \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}$	(4.42)
tensor poprzecznych odkształceń postaciowych	$\gamma_{\alpha 3} = \phi_\alpha + w_{,\alpha} + b_{\alpha\lambda}u_\lambda$	$\gamma_{13} = \phi_1 + \frac{\partial w}{\partial x_1}$	γ_{23} $= \phi_2 + \frac{\partial w}{\partial x_2}$	(4.43)
opis nieparzysty poprzecznej deformacji postaciowej	$\kappa_{\alpha 3} = \psi_{,\alpha} + \epsilon_{\lambda\beta}b_{\lambda\alpha}\phi_\beta$	$\kappa_{13} = \frac{\partial \psi}{\partial x_1}$	$\kappa_{23} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}$	(4.44)
zmiana grubości płyty w czasie deformacji	$\gamma_{33} = \psi$			(4.45)

Tabela 4.2. *Związki fizyczne*

	postać zredukowana	postać rozwinięta	
siły membranowe	$N_{\alpha\beta} = \int_{z_1}^{z_2} S_{\alpha\beta} dz$	$N_{11} = h_0 d_{11}\gamma_{11} + h_0 d_{12}\gamma_{22} + h_1 d_{11}\kappa_{11} + h_1 d_{12}\kappa_{22}$ $N_{12} = N_{21} = h_0 d_{66}(\gamma_{12} + \gamma_{21}) + h_1 d_{66}(\kappa_{12+} + \kappa_{21})$ $N_{22} = h_0 d_{12}\gamma_{11} + h_0 d_{22}\gamma_{22} + h_1 d_{12}\kappa_{11} + h_1 d_{22}\kappa_{22},$	(4.46)
siły poprzeczne	$N_{\alpha 3} = \int_{z_1}^{z_2} S_{\alpha 3} dz$	$N_{13} = \alpha_0 h_0 d_{55}\gamma_{13} + \alpha_1 h_1 d_{55}\kappa_{13}$ $N_{23} = \alpha_0 h_0 d_{44}\gamma_{23} + \alpha_1 h_1 d_{44}\kappa_{23}$	(4.47)
momenty zginające	$M_{\alpha\beta} = \int_{z_1}^{z_2} S_{\alpha\beta} z dz$	$M_{11} = h_1 d_{11}\gamma_{11} + h_1 d_{12}\gamma_{22} + h_2 d_{11}\kappa_{11} + h_2 d_{12}\kappa_{22}$ $M_{12} = M_{21} = h_1 d_{66}(\gamma_{12} + \gamma_{21}) + h_2 d_{66}(\kappa_{12} + \kappa_{21})$ $M_{22} = h_1 d_{12}\gamma_{11} + h_1 d_{22}\gamma_{22} + h_2 d_{12}\kappa_{11} + h_2 d_{22}\kappa_{22}$	(4.48)
momenty skręcające	$M_{\alpha 3} = \int_{z_1}^{z_2} S_{\alpha 3} z dz$	$M_{13} = \alpha_1 h_1 d_{55}\gamma_{13} + \alpha_2 h_2 d_{55}\kappa_{13}$ $M_{23} = \alpha_1 h_1 d_{44}\gamma_{23} + \alpha_2 h_2 d_{44}\kappa_{23}$	(4.49)

Tabela 4.3. *Związki statyczne*

postać zredukowana	postać rozwinięta	
$N_{\alpha\beta,\alpha} + f_\beta = 0$	$\frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} h_0 d_{11} u_1 + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} h_0 d_{12} u_2 + \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} h_1 d_{11} \phi_1 + + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} h_1 d_{12} \phi_2 + f_1 = 0$ $\frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2} h_0 d_{66} u_1 + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} h_0 d_{66} u_2 + \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2} h_1 d_{66} \phi_1 + + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} h_1 d_{66} \phi_2 + f_1 = 0$ $\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} h_0 d_{66} u_1 + \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} h_0 d_{66} u_2 + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} h_1 d_{66} \phi_1 + + \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} h_1 d_{66} \phi_2 + f_2 = 0$ $\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} h_0 d_{12} u_1 + \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2} h_0 d_{22} u_2 + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} h_1 d_{12} \phi_1 + + \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2} h_1 d_{22} \phi_2 + f_2 = 0$	(4.50)
$N_{\alpha 3,\alpha} + f_3 = 0$	$\frac{\partial}{\partial x_1} \alpha_0 h_0 d_{55} \phi_1 + \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} \alpha_0 h_0 d_{55} w + \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} \alpha_1 h_1 d_{55} \psi + f_3 = 0,$ $\frac{\partial}{\partial x_2} \alpha_0 h_0 d_{44} \phi_2 + \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2} \alpha_0 h_0 d_{44} w + \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2} \alpha_1 h_1 d_{44} \psi + f_3 = 0$	(4.51)

Tabela 4.3. *(c.d.) Związki statyczne*

$M_{\alpha\beta,\alpha} - N_{\beta 3} + m_\beta = 0$	$\frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} h_1 d_{11} u_1 + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} h_1 d_{12} u_2 - \frac{\partial}{\partial x_1} \alpha_1 h_1 d_{55} \psi +$ $+ \left(\frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} h_2 d_{11} - \alpha_0 h_0 d_{55} \right) \phi_1 + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} h_2 d_{12} \phi_2 - \frac{\partial}{\partial x_1} \alpha_0 h_0 d_{55} w$ $+ m_1 = 0$ $\frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2} h_1 d_{66} u_1 + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} h_1 d_{66} u_2 + \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2} h_2 d_{66} \phi_1$ $+ \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} h_2 d_{66} \phi_2 +$ $+m_1 = 0$ $\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} h_1 d_{66} u_1 + \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} h_1 d_{66} u_2 + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} h_2 d_{66} \phi_1$ $+ \left(\frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} h_2 d_{66} \right) \phi_2 +$ $+ \left(- \frac{\partial}{\partial x_2} \alpha_0 h_0 d_{44} \right) w + m_2 = 0$ $\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} h_1 d_{12} u_1 + \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2} h_1 d_{22} u_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} \alpha_1 h_1 d_{44} \psi$ $+ \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} h_2 d_{12} \phi_1 +$ $+ \left(\frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2} h_2 d_{22} - \alpha_0 h_0 d_{44} \right) \phi_2 + m_2 = 0$	(4.52)
$M_{\alpha 3,\alpha} + \epsilon_{\alpha\beta} N_{\alpha\beta} + m_\lambda = 0$	$\frac{\partial}{\partial x_2} h_0 d_{66} u_1 + \frac{\partial}{\partial x_1} h_0 d_{66} u_2 + \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} \alpha_2 h_2 d_{55} \psi +$ $+ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \alpha_1 h_1 d_{55} + \frac{\partial}{\partial x_2} h_1 d_{66} \right) \phi_1 + \frac{\partial}{\partial x_1} h_1 d_{66} \phi_2 + \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} \alpha_1 h_1 d_{55} w$ $+ m_3 = 0$ $- \frac{\partial}{\partial x_2} h_0 d_{66} u_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} h_0 d_{66} u_2 + \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2} \alpha_2 h_2 d_{44} \psi - \frac{\partial}{\partial x_2} h_1 d_{66} \phi_1$ $+$ $+ \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \alpha_1 h_1 d_{44} - \frac{\partial}{\partial x_1} h_1 d_{66} \right) \phi_2 + \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2} \alpha_1 h_1 d_{44} w + m_3 = 0$	(4.53)

Równania (4.50-4.53) można zapisać w postaci:

$$\mathbf{Lq} = \mathbf{Q}, \tag{4.54}$$

gdzie:

L − macierz sztywności:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} h_0L_1 & h_0L_4 & 0 & h_1L_1 & h_1L_4 & 0 \\ h_0L_4 & h_0L_2 & 0 & h_1L_4 & h_1L_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2h_2L_3 & \alpha_1h_1L_5 & \alpha_1h_1L_6 & \alpha_1h_1L_3 \\ h_1L_1 & h_1L_4 & -\alpha_1h_1L_5 & h_2L_1 - \alpha_0h_0d_{55} & h_2L_4 & -\alpha_0h_0L_5 \\ h_1L_4 & h_1L_2 & -\alpha_1h_1L_6 & h_2L_4 & h_2L_2 - \alpha_0h_0d_{44} & -\alpha_0h_0L_6 \\ 0 & 0 & \alpha_1h_1L_3 & \alpha_0h_0L_5 & \alpha_0h_0L_6 & \alpha_0h_0L_3 \end{bmatrix}, \tag{4.55}$$

gdzie:

$$L_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_1{}^2}d_{11} + \frac{\partial^2}{\partial x_2{}^2}d_{66}, \quad L_3 = \frac{\partial^2}{\partial x_1{}^2}d_{55} + \frac{\partial^2}{\partial x_2{}^2}d_{44}, \quad L_5 = \frac{\partial}{\partial x_1}d_{55},$$
$$L_2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1{}^2}d_{66} + \frac{\partial^2}{\partial x_2{}^2}d_{22}, \quad L_4 = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}(d_{12} + d_{66}), \quad L_6 = \frac{\partial}{\partial x_2}d_{44}, \tag{4.56}$$

q − wektor przemieszczeń:

$$\mathbf{q} = [u_1 \quad u_1 \quad \psi \quad \phi_1 \quad \phi_2 \quad w]^T. \tag{4.57}$$

4.3.2. Pasma płytowe ortotropowe

Teorię sześcioparametrową zastosować można do pasma płytowego, co prowadzi do zmniejszenia liczby niezależnych stopni swobody do czterech. Zakładając, że szerokość pasma płytowego wynosi a i wprowadzając współrzędną bezwymiarową $\xi = {}^{x_1}/_{a}$, wyprowadzono zależności przedstawione w tabelach 4.4-4.6.

Tabela 4.4. *Związki geometryczne*

	zapis wskaźnikowy	postać rozwinięta	
tensor opisujący deformację membranową	$\gamma_{\alpha\beta} = u_{\alpha,\beta} - b_{\alpha\beta} w - \epsilon_{\alpha\beta}\psi$	$\gamma_{11} = \dfrac{du_1}{dx_1}$	(4.58)
tensor krzywizn i deformacji	$\kappa_{\alpha\beta} = \phi_{\alpha,\beta} - \epsilon_{\beta\lambda} b_{\lambda\alpha}\psi$	$\kappa_{11} = \dfrac{d\phi_1}{dx_1}$	(4.59)
tensor poprzecznych odkształceń postaciowych	$\gamma_{\alpha 3} = \phi_\alpha + w_{,\alpha} + b_{\alpha\lambda} u_\lambda$	$\gamma_{13} = \phi_1 + \dfrac{dw}{dx_1}$	(4.60)
opis nieparzysty poprzecznej deformacji postaciowej	$\kappa_{\alpha 3} = \psi_{,\alpha} + \epsilon_{\lambda\beta} b_{\lambda\alpha}\phi_\beta$	$\kappa_{13} = \dfrac{d\psi}{dx_1}$	(4.61)
zmiana grubości płyty w czasie deformacji	$\gamma_{33} = \psi$		(4.62)

Tabela 4.5. *Związki fizyczne*

	postać zredukowana	postać rozwinięta	
siły membranowe	$N_{\alpha\beta} = \int_{z_1}^{z_2} S_{\alpha\beta} dz$	$N_{11} = h_0 d_{11} \gamma_{11} + h_1 d_{11} \kappa_{11}$	(4.63)
siły poprzeczne	$N_{\alpha 3} = \int_{z_1}^{z_2} S_{\alpha 3} dz$	$N_{13} = \alpha_0 h_0 d_{55} \gamma_{13} + \alpha_1 h_1 d_{55} \kappa_{13}$	(4.64)
momenty zginające	$M_{\alpha\beta} = \int_{z_1}^{z_2} S_{\alpha\beta} z dz$	$M_{11} = h_1 d_{11} \gamma_{11} + h_2 d_{11} \kappa_{11}$	(4.65)
momenty skręcające	$M_{\alpha 3} = \int_{z_1}^{z_2} S_{\alpha 3} z dz$	$M_{13} = \alpha_1 h_1 d_{55} \gamma_{13} + \alpha_2 h_2 d_{55} \kappa_{13}$	(4.66)

Tabela 4.6. *Związki statyczne*

postać zredukowana	postać rozwinięta	
$\frac{dN_{11}}{dx_1}+f_1=0$	$\frac{d^2}{d{x_1}^2}h_0 d_{11}u_1+\frac{d^2}{d{x_1}^2}h_1 d_{11}\phi_1+f_1=0$ $\frac{d^2}{d\xi^2}h_0 d_{11}u_1+\frac{d^2}{d\xi^2}h_1 d_{11}\phi_1+a^2 f_1=0$	(4.67)
$\frac{dN_{13}}{dx_1}+f_3=0$	$\frac{d^2}{d{x_1}^2}\alpha_1 h_1 d_{55}\psi+\frac{d}{dx_1}\alpha_0 h_0 d_{55}\phi_1+\frac{d^2}{d{x_1}^2}\alpha_0 h_0 d_{55}w+f_3=0$ $\frac{d^2}{d\xi^2}\alpha_1 h_1 d_{55}\psi+\frac{d}{d\xi}\alpha_0 h_0 d_{55}\phi_1 a+\frac{d^2}{d\xi^2}\alpha_0 h_0 d_{55}w+a^2 f_3=0$	(4.68)
$\frac{dM_{11}}{dx_1}-N_{13}+m_1=0$	$\frac{d^2}{d{x_1}^2}h_1 d_{11}u_1-\frac{d}{dx_1}\alpha_1 h_1 d_{55}\psi+\left(\frac{d^2}{d{x_1}^2}h_2 d_{11}-\alpha_0 h_0 d_{55}\right)\phi_1$ $-\frac{d}{dx_1}\alpha_0 h_0 d_{55}w+m_1=0$ $\frac{d^2}{d\xi^2}h_1 d_{11}u_1-\frac{d}{d\xi}\alpha_1 h_1 d_{55}\psi a+\left(\frac{d^2}{d\xi^2}h_2 d_{11}-\alpha_0 h_0 d_{55}a^2\right)\phi_1$ $-\frac{d}{d\xi}\alpha_0 h_0 d_{55}wa+a^2 m_1=0$	(4.69)
$\frac{dM_{13}}{dx_1}+m_3=0$	$\frac{d^2}{d{x_1}^2}\alpha_2 h_2 d_{55}\psi+\frac{d}{dx_1}\alpha_1 h_1 d_{55}\phi_1+\frac{d^2}{d{x_1}^2}\alpha_2 h_2 d_{55}w+m_3=0$ $\frac{d^2}{d\xi^2}\alpha_2 h_2 d_{55}\psi+\frac{d}{d\xi}\alpha_1 h_1 d_{55}\phi_1 a+\frac{d^2}{d\xi^2}\alpha_2 h_2 d_{55}w+a^2 m_3=0$	(4.70)

Równania (3.40-3.43) można sprowadzić do zapisu macierzowego:

$$\tilde{\mathbf{L}}\mathbf{q}=-\mathrm{a}^2\mathbf{Q}, \tag{4.71}$$

gdzie:

$\tilde{\mathbf{L}}$ – macierz sztywności;

$$\tilde{\mathbf{L}}=\begin{bmatrix} A_0L_1 & 0 & A_1L_1 & 0 \\ 0 & B_2L_1 & aB_1L_2 & B_1L_1 \\ A_1L_1 & -aB_1L_2 & A_2L_1-a^2B_0 & -aB_0L_2 \\ 0 & B_1L_1 & aB_0L_2 & B_0L_1 \end{bmatrix}, \tag{4.72}$$

gdzie:

$$L_1 = \frac{d^2}{d\xi^2}, \qquad L_2 = \frac{d}{d\xi}, \qquad A_i = h_i d_{11}, \qquad B_i = \alpha_i h_i d_{55}, \tag{4.73}$$

$\mathbf{q}$ – wektor przemieszczeń;

$$\mathbf{q} = [u_1 \quad \psi \quad \phi_1 \quad w]^T, \tag{4.74}$$

$\mathbf{Q}$ – wektor sił wewnętrznych.

$$\mathbf{Q} = -a^2[f_1 \quad m_3 \quad m_1 \quad f_3]^T. \tag{4.75}$$

4.3.3. Płyta i pasmo swobodnie podparte

Rozwiązując układy równań różniczkowych (4.54) i (4.71), można otrzymać jawne postacie wzorów na przemieszczenia i siły wewnętrzne dla dowolnych warunków obciążenia i podparcia. W pracy przedstawiono wzory dla konstrukcji swobodnie podpartych.

W pierwszej kolejności rozpatrzono płytę ortotropową swobodnie podpartą na czterech krawędziach obciążoną równomiernie rozłożonym obciążeniem p. Funkcję obciążenia przyjęto jako [Chmielewski i Imiełowski, 2020]:

$$f_z(x,y) = -\frac{16p}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}. \tag{4.76}$$

Maksymalne przemieszczenie przyjęto jako pierwszy element szeregu Fouriera funkcji ugięcia przyjętej jako:

$$w_{płyta}(x,y) = w_0 \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}. \tag{4.77}$$

Rozwiązując równania (4.54), otrzymano wzór na maksymalne ugięcie płyty ortotropowej:

$$w_{płyta,max} = -\frac{16a^2b^2}{\alpha_0 h^3\pi^6}\frac{A}{B}p, \tag{4.78}$$

gdzie:

$$A = 144\alpha_0^2 a^4 b^4 d_{44} d_{55} + 12\alpha_0 a^2 b^2 [a^2(d_{22}d_{55} + d_{44}d_{66}) + b^2(d_{11}d_{44} + d_{55}d_{66})]h^2\pi^2 + [b^4 d_{11}d_{66} + a^4 d_{22}d_{66} - a^2b^2(d_{12}^2 - d_{11}d_{22} + 2d_{12}d_{66})]h^4\pi^4),$$

$$B = \left[12\alpha_0 a^2 b^2 d_{44} d_{55}\left(b^4 d_{11} + 2a^2b^2 d_{22}(d_{12} + 2d_{66})\right) + (a^2 d_{44} + b^2 d_{55})[b^4 d_{11}d_{66} + a^4 d_{22}d_{66} - a^2b^2(d_{12}^2 - d_{11}d_{22} + 2d_{12}d_{66})]\right] h^2\pi^2,$$

przy czym: $\alpha_0 = 5/6$ i $\alpha_2 = 7/10$ są współczynnikami ścinania przyjętymi według [Witkowski, 2011; Obara, 2019b, c].

Następnie rozpatrzono pasmo płytowe ortotropowe swobodnie podparte obciążone równomiernie rozłożonym obciążeniem p. Funkcję obciążenia przyjęto jako: $f_z(x) = -p$. Maksymalne przemieszczenie przyjęto w postaci wielomianu czwartego stopnia $w(x)$. Rozwiązując równania (4.71), otrzymano wzór na maksymalne ugięcie pasma płytowego ortotropowego:

$$w_{pasmo,max} = -\frac{a^2 p}{h}\left[\frac{5}{32}\left(\frac{a}{h}\right)^2\frac{1}{d_{11}} + \frac{1}{8}\frac{1}{\alpha_0 d_{55}}\right]. \tag{4.79}$$

4.4. Model kontynualny

Liczba publikacji na temat modelowania kontynualnego powtarzalnych konstrukcji prętowych stale rośnie. Stan badań nad równoważnym modelowaniem kontynualnym tych struktur przedstawiono m. in. w [Liu *i in.*, 2022]. Autorzy opisali zalety i przyszłe kierunki tego podejścia. Zastosowania modelu kontynualnego do belkowych i płytowych konstrukcji prętowych zaproponowali m.in. [Noor *i in.*, 1988; Teughels i De Roeck, 2000; Nemeth, 2013]. W przypadku kratownic tensegrity model kontynualny zastosowano w [Kebiche *i in.*, 1999; Al Sabouni-Zawadzka i Gilewski, 2015, 2016; Al Sabouni-Zawadzka *i in.*, 2016; Yildiz i Lesieutre, 2019; Gilewski i Al Sabouni-Zawadzka, 2020]. Kebiche *i in.* przedstawili procedurę wyznaczania równoważnych właściwości kontynualnych układów charakteryzujących się stanami samonaprężenia. Procedura ta została oparta na równoważności energii między modelem dyskretnym a modelem kontynualnym. Ekwiwalentne właściwości kontynualne struktur tensegrity zostały określone po czterech przekształceniach macierzowych w oparciu o podejście zaproponowane przez Dow *i in.* [Dow *i in.*, 1985]. Zastosowane podejście zostało zweryfikowane na przykładzie trzech podstawowych modułów tensegrity. Zaprezentowano współczynniki ekwiwalentnych macierzy sprężystości i porównano ze współczynnikami otrzymanymi metodą elementów skończonych. W szczególności zbadano wpływ poziomu stanu samonaprężenia na sztywność zastępczą. Yildiz i Lesieutre również wykorzystali metodę ekwiwalentnej energii do budowy konstrukcji belkowych – wież tensegrity. Uzyskane równoważne właściwości sztywności zostały zweryfikowane za pomocą nieliniowej analizy metodą elementów skończonych. Model kontynualny struktur tensegrity był również tematem rozważań Al Sabouni-Zawadzkiej, która w pracy doktorskiej [Al Sabouni-Zawadzka, 2016] zaproponowała zastosowanie uproszczonego modelu kontynualnego tensegrity.

W pracach [Al Sabouni-Zawadzka i Gilewski, 2015, 2016; Gilewski i Al Sabouni-Zawadzka, 2020] opisano ekwiwalentne współczynniki macierzy sprężystości anizotropowych modułów tensegrity. Modele kontynualne modułów uzyskano przez porównanie energii odkształcenia. Z kolei w [Al Sabouni-Zawadzka *i in.*, 2016] autorzy proponują wykorzystanie liniowej sześcioparametrowej teorii powłok [Chróścielewski *i in.*, 2004, 2011; Witkowski, 2011; Burzyński *i in.*, 2016b, a; Pietraszkiewicz, 2016] do uzyskania modelu kontynualnego ortotropowych płytowych struktur tensegrity z uwzględnieniem stanów samonaprężenia. Analizie poddano moduły tensegrity, oparte na kształcie czteroramiennych rozszerzonych ośmiościanów z dodatkowymi cięgnami. Przedstawiono rozwiązania w postaci zamkniętej dla wybranych sposobów podparcia pasm tensegrity oraz swobodnie podpartej płyty prostokątnej z obciążeniem sinusoidalnym. Biorąc pod uwagę teorię powłok, jako powierzchnię odniesienia przyjęto płaszczyznę środkową. Liniową sześcioparametrową teorię powłok do analizy ortotropowych płyt i pasm płytowych tensegrity zastosowała również Obara [Obara, 2019b, 2019c], przy czym pod uwagę wzięła różne płaszczyzny podparcia konstrukcji, a tym samym różne powierzchnie odniesienia modelu płyty.

W znanej autorce literaturze brak jest walidacji modelu kontynualnego płytowych konstrukcji tensegrity charakteryzujących się istnieniem mechanizmów. W [Kebiche *i in.*, 2008; Yildiz i Lesieutre, 2019] zwalidowano jedynie współczynniki macierzy sztywności, ale prace te nie sprawdzają globalnego zachowania konstrukcji tensegrity. Dlatego niniejsza praca rozwija wcześniejsze badania [Obara, 2019b, d] i sprawdza celowość stosowania podejścia kontynualnego.

Podstawą do budowy modelu kontynualnego jest metoda równoważnej energii [Green, 1968; Noor i Russell, 1986; Noor *i in.*, 1978; Noor, 1988; Noor *i in.*, 1988; Burgardt i Cartraud, 1999; Zhang *i in.*, 2015; Liu *i in.*, 2019; Dow *i in.*, 1985]. Zakłada się, że energia odkształcenia elementów skończonych zdeformowanej kratownicy tensegrity zawiera taką samą energię jak analogiczny model kontynualny tejże kratownicy. Aby skorzystać z równości energii, wektor przemieszczeń węzłowych modelu dyskretnego $\mathbf{q}$ musi być wyrażony jako funkcja odkształceń ekwiwalentnego modelu kontynualnego $\boldsymbol{\varepsilon}$. W tym celu z rozważanej konstrukcji belkowej lub płytowej wyizolować należy powtarzalny, bazowy moduł ortotropowy, a następnie pole przemieszczeń tego powtarzalnego modułu $\mathbf{q}^{3\mathrm{D}}(x,y,z) = [u,v,w\,]^T$ należy wyrazić za pomocą pełnego wielomianu trzeciego rzędu, w odniesieniu do lokalnego układu współrzędnych o początku w środku powtarzalnego modułu:

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= a_1 + a_2x + a_3y + a_4z + \cdots + a_{20}xyz, \\ v(x,y,z) &= b_1 + b_2x + b_3y + b_4z + \cdots + b_{20}xyz, \\ w(x,y,z) &= c_1 + c_2x + c_3y + c_4z + \cdots + c_{20}xyz. \end{aligned} \tag{4.80}$$

W celu obliczenia 60 współczynników a_i, b_i, c_i i wyrażenia ich jako odkształcenia modelu kontynualnego, wielomiany (4.80) muszą być zapisane jako rozwinięcie szeregu Taylora:

$$\begin{gathered} f(x+u, y+v, z+w) \approx f(x,y,z) + u\frac{\delta f(x,y,z)}{\delta x} + v\frac{\delta f(x,y,z)}{\delta y} + w\frac{\delta f(x,y,z)}{\delta z} + \\ + \frac{1}{2!}\left[u^2\frac{\delta^2 f(x,y,z)}{\delta x^2} + v^2\frac{\delta^2 f(x,y,z)}{\delta y^2} + w^2\frac{\delta^2 f(x,y,z)}{\delta z^2} + 2uv\frac{\delta^2 f(x,y,z)}{\delta x \delta y} + \right. \\ \left. 2vw\frac{\delta^2 f(x,y,z)}{\delta y \delta z} + +2uw\frac{\delta^2 f(x,y,z)}{\delta x \delta z}\right] \end{gathered} \tag{4.81}$$

odpowiednio zróżniczkowane i obliczone dla współrzędnych początku lokalnego układu współrzędnych powtarzalnego modułu.

```
u[x_, y_, z_] := a1 + a2 * x + a3 * y + a4 * z + a5 * x^2 + a6 * x * y + a7 * y^2 +
  a8 * x * z + a9 * z^2 + a10 * x * z + a11 * x^3 + a12 * x^2 * y + a13 * x * y^2 +
  a14 * x^2 * z + a15 * x * z^2 + a16 * y^3 + a17 * y^2 * z + a18 * z^2 * y + a19 * z^3 +
  a20 * x * y * z
v[x_, y_, z_] := b1 + b2 * x + b3 * y + b4 * z + b5 * x^2 + b6 * x * y + b7 * y^2 +
  b8 * x * z + b9 * z^2 + b10 * x * z + b11 * x^3 + b12 * x^2 * y + b13 * x * y^2 +
  b14 * x^2 * z + b15 * x * z^2 + b16 * y^3 + b17 * y^2 * z + b18 * z^2 * y + b19 * z^3 +
  b20 * x * y * z
w[x_, y_, z_] := c1 + c2 * x + c3 * y + c4 * z + c5 * x^2 + c6 * x * y + c7 * y^2 +
  c8 * x * z + c9 * z^2 + c10 * x * z + c11 * x^3 + c12 * x^2 * y + c13 * x * y^2 +
  c14 * x^2 * z + c15 * x * z^2 + c16 * y^3 + c17 * y^2 * z + c18 * z^2 * y + c19 * z^3 +
  c20 * x * y * z
tu[x_, y_, z_] := Series[u[x, y, z], {x, x1, 2}, {y, y1, 2}, {z, z1, 2}]
tv[x_, y_, z_] := Series[v[x, y, z], {x, x1, 2}, {y, y1, 2}, {z, z1, 2}]
tw[x_, y_, z_] := Series[w[x, y, z], {x, x1, 2}, {y, y1, 2}, {z, z1, 2}]
coef = D[D[tu[x, y, z], y] / 2 + D[tv[x, y, z], x] / 2, y];
x1 = y1 = z1 = x = y = z = 0;
coef

Out[10]= a7 + b6/2
```

Rys. 4.5. Wyznaczenie gradientu odkształcenia $\varepsilon_{xy,y}$ w środowisku *Mathematica*

W celu zilustrowania procedury, na rys. 4.5 przedstawiono przykładowe wyznaczenie jednego ze współczynników w środowisku *Mathematica*. Wyznaczono gradient odkształcenia $\varepsilon_{xy,y}$:

$$\varepsilon_{xy,y} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta x}\right)}{\delta y} \tag{4.82}$$

W opisie wykorzystano zapis wskaźnikowy.

W analogiczny sposób wyznaczono wszystkie współczynniki wielomianów pola przemieszczeń (4.80) i uzyskano funkcje w poniższej postaci:

$$\begin{aligned}
u(x,y,z) = {} & u_0 + \varepsilon_x x + (\varepsilon_{xy} - r)y + (\varepsilon_{xz} + q)z + \frac{\varepsilon_{x,x}}{2}x^2 + \varepsilon_{x,y}xy + \varepsilon_{x,z}xz \\
& + \frac{2\varepsilon_{xy,y} - \varepsilon_{y,x}}{2}y^2 + (\varepsilon_{xy,z} - \varepsilon_{yz,x} + \varepsilon_{xz,y})yz + \frac{2\varepsilon_{xz,z} - \varepsilon_{z,x}}{2}z^2 \\
& + \frac{\varepsilon_{x,xx}}{6}x^3 + \frac{\varepsilon_{x,xy}}{2}x^2y + \frac{\varepsilon_{x,xz}}{2}x^2z + \frac{2\varepsilon_{xy,yy} - \varepsilon_{y,xy}}{6}y^3 \\
& + \frac{\varepsilon_{x,yy}}{2}y^2x + \frac{2\varepsilon_{xy,yz} - \varepsilon_{y,xz}}{2}y^2z + \frac{2\varepsilon_{xz,zz} - \varepsilon_{zx,z}}{6}z^3 \\
& + \frac{\varepsilon_{x,zz}}{2}z^2x + \frac{2\varepsilon_{xz,yz} - \varepsilon_{z,xy}}{2}z^2y + \varepsilon_{x,yz}xyz, \\
v(x,y,z) = {} & v_0 + (\varepsilon_{xy} + r)x + \varepsilon_y y + (\varepsilon_{yz} - p)z + \frac{2\varepsilon_{xy,x} - \varepsilon_{x,y}}{2}x^2 + \varepsilon_{y,x}xy \\
& + (\varepsilon_{xy,z} + \varepsilon_{yz,x} - \varepsilon_{xz,y})xz + \frac{\varepsilon_{y,y}}{2}y^2 + \varepsilon_{y,z}yz + \frac{2\varepsilon_{yz,z} - \varepsilon_{z,y}}{2}z^2 \\
& + \frac{2\varepsilon_{xy,xx} - \varepsilon_{x,xy}}{6}x^3 + \frac{\varepsilon_{y,xx}}{2}x^2y + \frac{2\varepsilon_{xy,xz} - \varepsilon_{x,yz}}{2}x^2z \\
& + \frac{\varepsilon_{y,yy}}{6}y^3 + \frac{\varepsilon_{y,xy}}{2}y^2x + \frac{\varepsilon_{y,yz}}{2}y^2z + \frac{2\varepsilon_{yz,zz} - \varepsilon_{z,yz}}{6}z^3 \\
& + \frac{2\varepsilon_{yz,xz} - \varepsilon_{z,xy}}{2}z^2x + \frac{\varepsilon_{y,zz}}{2}z^2y + \varepsilon_{y,xz}xyz, \\
w(x,y,z) = {} & w_0 + (\varepsilon_{xy} - q)x + (\varepsilon_{yz} + p)y + \varepsilon_z z + \frac{2\varepsilon_{xz,x} - \varepsilon_{x,z}}{2}x^2 \\
& + (-\varepsilon_{xy,z} + \varepsilon_{yz,x} + \varepsilon_{xz,y})xy + \varepsilon_{z,x}xz + \frac{2\varepsilon_{yz,y} - \varepsilon_{y,z}}{2}y^2 \\
& + \varepsilon_{z,y}yz + \varepsilon_{z,z}z^2 + \frac{2\varepsilon_{xz,xx} - \varepsilon_{x,xz}}{6}x^3 + \frac{2\varepsilon_{xz,xy} - \varepsilon_{x,yz}}{2}x^2y \\
& + \frac{\varepsilon_{z,xx}}{6}x^2z + \frac{2\varepsilon_{yz,yy} - \varepsilon_{y,yz}}{6}y^3 + \frac{2\varepsilon_{yz,xy} - \varepsilon_{y,xz}}{2}y^2x \\
& + \frac{\varepsilon_{z,yy}}{2}y^2z + \frac{\varepsilon_{z,zz}}{6}z^3 + \frac{\varepsilon_{z,xz}}{2}z^2x + \frac{\varepsilon_{z,yz}}{2}z^2y + \varepsilon_{z,xy}xyz.
\end{aligned} \tag{4.83}$$

Podstawiając do wzorów (4.83) współrzędne węzłów powtarzalnego modułu konstrukcji (w odniesieniu do lokalnego układu współrzędnych, o początku w środku powtarzalnego modułu), przemieszczenia tych węzłów zostają skorelowane z wektorem odkształcenia modelu kontynualnego $\boldsymbol{\varepsilon}(\in \mathbb{R}^{60\times 1})$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon} = [&\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_{xy} \quad \varepsilon_{xz} \quad \varepsilon_{yz} \quad u_0 \quad v_0 \quad w_0 \quad r \quad p \quad q \quad \varepsilon_z \quad \varepsilon_{x,x} \quad \varepsilon_{x,y} \quad \varepsilon_{x,z} \\ &\varepsilon_{y,x} \quad \varepsilon_{z,x} \quad \varepsilon_{y,z} \quad \varepsilon_{z,y} \quad \varepsilon_{z,z} \quad \varepsilon_{xy,x} \quad \varepsilon_{xz,x} \quad \varepsilon_{xy,z} \quad \varepsilon_{yz,x} \quad \varepsilon_{xz,y} \quad \varepsilon_{xy,y} \quad \varepsilon_{yz,y} \\ &\varepsilon_{xz,z} \quad \varepsilon_{yz,z} \quad \varepsilon_{x,xx} \quad \varepsilon_{x,xy} \quad \varepsilon_{x,xz} \quad \varepsilon_{y,xx} \quad \varepsilon_{x,yz} \quad \varepsilon_{z,xx} \quad \varepsilon_{y,xy} \quad \varepsilon_{y,yy} \quad \varepsilon_{y,yz} \\ &\varepsilon_{x,yy} \quad \varepsilon_{y,xz} \quad \varepsilon_{z,yy} \quad \varepsilon_{z,xz} \quad \varepsilon_{z,yz} \quad \varepsilon_{z,zz} \quad \varepsilon_{x,zz} \quad \varepsilon_{z,xy} \quad \varepsilon_{y,zz} \quad \varepsilon_{xy,xx} \quad \varepsilon_{xz,xx} \\ &\varepsilon_{xz,xx} \quad \varepsilon_{xy,xz} \quad \varepsilon_{xz,xy} \quad \varepsilon_{xy,yy} \quad \varepsilon_{yz,yy} \quad \varepsilon_{xy,yz} \quad \varepsilon_{yz,xy} \quad \varepsilon_{xz,zz} \quad \varepsilon_{yz,zz} \\ &\varepsilon_{yz,xz} \quad \varepsilon_{xz,yz}].\end{aligned} \tag{4.84}$$

Wektor odkształcenia modelu kontynualnego $\boldsymbol{\varepsilon}$ składa się kolejno z pięciu odkształceń (4.30) ε_x, ε_y, $\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}$, ε_{yz}, sześciu ruchów bryły sztywnej u_0, v_0, w_0, φ_1, φ_2, φ_3, odkształcenia ε_z i czterdziestu ośmiu gradientów odkształcenia $\varepsilon_{x,x}, \dots, \varepsilon_{xz,yz}$. Od tego momentu należy zastosować cztery przekształcenia macierzy, aby wyznaczyć ekwiwalentną macierz sprężystości $\mathbf{E}(\in \mathbb{R}^{5\times 5})$ [Noor *i in.*, 1978, 1988; Noor i Russell, 1986; Noor, 1988; Kebiche *i in.*, 2008].

4.4.1. Pierwsza transformacja

Pierwsza transformacja polega na zastosowaniu założenia o równoważności energetycznej modelowanej struktury kontynualnej:

$$E_s^{\mathrm{3D}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{4.85}$$

i jego odpowiednika w modelu dyskretnym:

$$E_s^{\mathrm{FEM}} = \frac{1}{2}\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{q}. \tag{4.86}$$

W celu walidacji modelu kontynualnego w pracy przyjęto $\mathbf{K} = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_G(\mathbf{S})$.

Rozwinięcia wielomianowe (4.83) należy zastosować do wszystkich m stopni swobody modelu skończonego (czyli kratownicy o n węzłach) modułu podstawowego:

$$\mathbf{q} = \mathbf{T_1}\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{4.87}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \dots \\ u_n \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & y_1 & & & & \\ 0 & y_1 & x_1 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & \\ & & & \dots & & & \\ & & & & 0 & 0 & y_n z_n^2 \\ & & & & \frac{z_n^3}{3} & x_n z_n^2 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \\ \dots \\ \varepsilon_{yz,zz} \\ \varepsilon_{yz,xz} \\ \varepsilon_{xz,yz} \end{bmatrix}$$

gdzie:

$\mathbf{T_1}(\in \mathbb{R}^{m\times 60})$ – pierwsza macierz transformacji.

Podstawiając (4.87) do (4.86), energię odkształcenia można zapisać jako funkcję wektora $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$E_s^{\mathrm{FEM}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\mathbf{T}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{T}_1\boldsymbol{\varepsilon}. \tag{4.88}$$

4.4.2. Druga transformacja

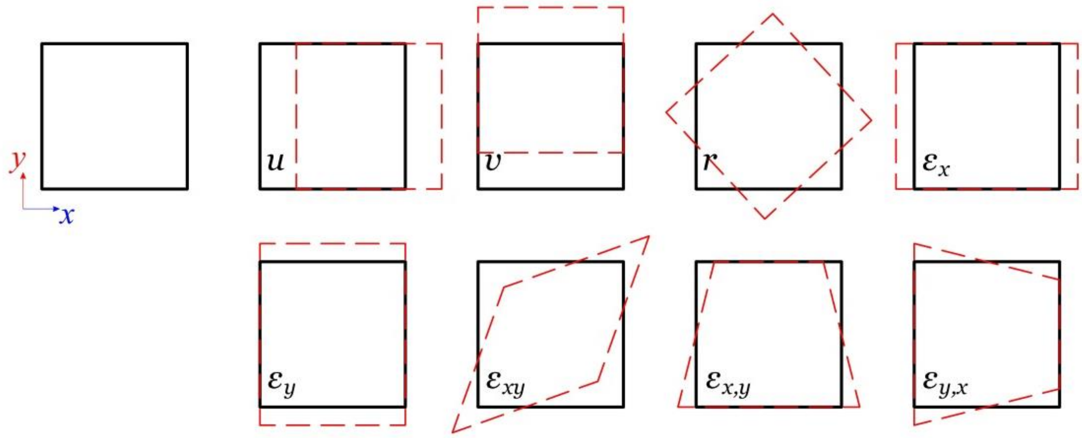
Kratownica może wykonywać tyle liniowo niezależnych ruchów ciała sztywnego i wzorów deformacji, ile ma stopni swobody. Na przykład płaski prostokąt o ośmiu stopniach swobody ma 3 ruchy ciała sztywnego u, v, r, 3 odkształcenia $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$ i 2 gradienty odkształcenia $\varepsilon_{x,y}, \varepsilon_{y,x}$ (8 liniowo niezależnych możliwych odkształceń) pokazane na rys. 4.6. Wszystkie odkształcenia liniowo zależne, a także ruchy ciała sztywnego są eliminowane w następnej części analizy:

$$E_s^{\mathrm{FEM}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\mathbf{T}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{T}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{4.89}$$

gdzie:

$\mathbf{T_2}(\in \mathbb{R}^{m\times i})$ – druga macierz transformacji, i – liczba niezależnych odkształceń pomniejszona o liczbę ruchów bryły sztywnej.

Zbiór liniowo niezależnych współczynników można wyznaczyć, obliczając rząd macierzy $\mathbf{T}_1$ [Kebiche *i in.*, 2008] lub stosując więzy kinematyczne [Dow *i in.*, 1985].



Rys. 4.6. Konfiguracje liniowo niezależne dla płaskiej struktury o 8 stopniach swobody

4.4.3. Trzecia transformacja

W trzeciej transformacji wektor odkształcenia $\boldsymbol{\varepsilon}$ rozkłada się jako:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix}, \tag{4.90}$$

gdzie:

$\boldsymbol{\alpha}(\in \mathbb{R}^{5\times 1})$ – wypadkowe odkształcenie podstawowe; w rozpatrywanym przypadku – $\boldsymbol{\alpha} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_{xy} \quad \varepsilon_{xz} \quad \varepsilon_{yz}]^T$,

$\boldsymbol{\beta}\left(\in \mathbb{R}^{(i-5)\times 1}\right)$ – reszta współczynników.

Powyższa modyfikacja daje:

$$E_s^{\mathrm{FEM}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix}^T \mathbf{T}_3^{\mathrm{T}}\mathbf{T}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{T}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix}^T \mathbf{S}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix}, \tag{4.91}$$

gdzie:

$\mathbf{T_3}\left(\in \mathbb{R}^{m\times i}\right)$– trzecia macierz transformacji.

Ten krok można łatwo pominąć, umieszczając wynikowe odkształcenie podstawowe $\boldsymbol{\alpha}$ na pierwszych pozycjach wektora odkształcenia $\boldsymbol{\varepsilon}$ na początku analizy.

4.4.4. Czwarta transformacja

W ostatniej transformacji wymiar macierzy $\mathbf{S}\left(\in \mathbb{R}^{i\times i}\right)$ jest dalej redukowany do $\mathbf{E}(\in \mathbb{R}^{5\times 5})$. Macierz $\mathbf{S}$ jest rozkładana na cztery podmacierze: $\mathbf{K}_{11}(\in \mathbb{R}^{5\times 5})$, $\mathbf{K}_{12}\left(\in \mathbb{R}^{5\times(i-5)}\right)$, $\mathbf{K}_{21}\left(\in \mathbb{R}^{(i-5)\times 5}\right)$ i $\mathbf{K}_{22}\left(\in \mathbb{R}^{(i-5)\times(i-5)}\right)$, więc (4.91) przyjmuje postać:

$$E_s^{\mathrm{FEM}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\beta}\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}\mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12}\\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\beta}\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}^T\mathbf{E}\boldsymbol{\alpha}. \tag{4.92}$$

Czwartą transformację można przeprowadzić dwoma metodami. Pierwsze podejście wykorzystuje metodę kondensacji statycznej, która zachowuje możliwe wzorce deformacji w połączeniu z podstawowymi odkształceniami, a macierz $\mathbf{E}$ przyjmuje postać [Noor *i in.*, 1978, 1988; Noor i Russell, 1986; Noor, 1988; Kebiche *i in.*, 2008]:

$$\mathbf{E} = \mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12}\mathbf{K}_{22}^T\mathbf{K}_{21}. \tag{4.93}$$

Drugie, prostsze podejście polega na pominięciu wierszy i kolumn związanych z wektorem $\boldsymbol{\beta}$ w (4.92), więc macierz $\mathbf{E}$ wygląda następująco [Al Sabouni-Zawadzka i Gilewski, 2015; Al Sabouni-Zawadzka, 2016; Al Sabouni-Zawadzka *i in.*, 2016; Obara, 2019b, d; Gilewski i Al Sabouni-Zawadzka, 2020]:

$$\mathbf{E} = \mathbf{K}_{11}. \tag{4.94}$$

ROZDZIAŁ 5.

JAKOŚCIOWA OCENA KONSTRUKCJI

5.1. Wprowadzenie

W pracy, do oceny jakościowej ustrojów kratowych, zastosowano analizę spektralną macierzy kratownic. Analizę jakościową struktur tensegrity można przeprowadzić jedynie stosując model dyskretny. W pierwszej kolejności identyfikowano immanentne cechy struktur tensegrity, tj. istnienie stanów samonaprężenia i mechanizmów, a następnie stosowano klasyfikację z rozdziału 3.4. Rozważania rozpoczęto od rozpatrzenia 5 podstawowych modułów tensegrity. Dla każdego w modułów podano współrzędne węzłów, numerację elementów i przedstawiono w sposób jawny wyniki analizy jakościowej. W każdym z modułów zablokowano taką ilość stopni swobody, która blokuje wszystkie ruchy sztywne konstrukcji. Ze wszystkich rozpatrywanych modułów zbudowano następnie bardziej skomplikowane konstrukcje płytowe, składające się z różnej liczby modułów składowych. Dla proponowanych struktur rozważono różne warunki podparcia. Ze względu na większy stopień skomplikowania struktur płytowych w porównaniu do modułów pojedynczych, pominięto przedstawienie pełnej analizy jakościowej i podano wyłącznie rezultaty analizy jakościowej w formie tabelarycznej.

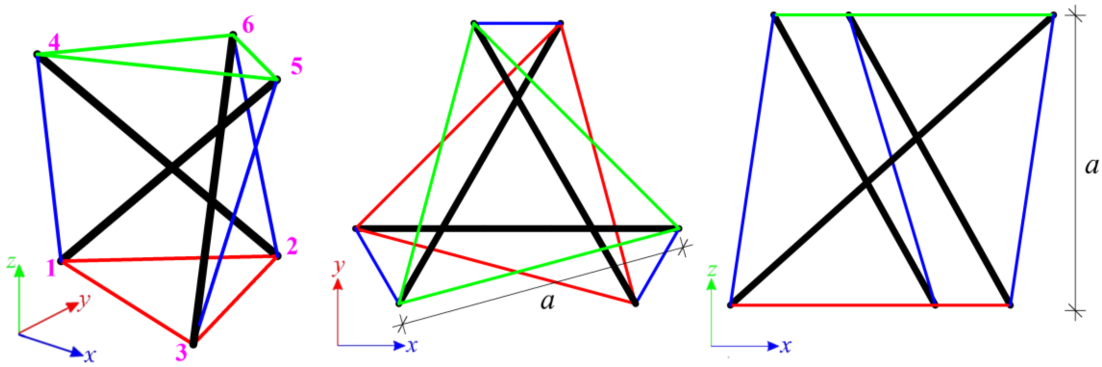
5.2. Podstawowe moduły trójwymiarowe

W literaturze można znaleźć wiele przykładów modułów tensegrity. Sposoby ich tworzenia na podstawie wzorów strukturalnych form tensegrity zostały opisane w rozdziale 2.3. Forma modułu tensegrity może powstać na bazie graniastosłupa prawidłowego (np. *Simplex* i *Quartex*), wielościanu foremnego (np. *Octahedron 3z* i *Octahedron 5z* – forma na bazie ośmiościanu foremnego) lub wielościanu półforemnego (np. *Cuboctahedron* – forma na bazie sześcio-ośmiościanu oraz *Truncated Tetrahedron* – forma na bazie czworościanu ściętego). Istnieje także grupa modułów powstałych jako rozszerzenie ośmiościanu foremnego, tzw. *expanded Octahedron.* Geometria wybranej bryły jest modyfikowana w celu znalezienia stabilnej konfiguracji struktury w procesie *form-finding.*

W poniższym rozdziale rozpatrzono moduły oparte na bryle graniastosłupa prawidłowego – *Simplex* i *Quartex* – oraz moduł powstały poprzez jednokrotne rozszerzenie ośmiościanu foremnego – *expanded Octahedron*. Dodatkowo, rozważono także zmodyfikowane formy modułów – *modified Simplex* i *modified Quartex*, których przekształcona geometria pozwala na łatwiejsze łączenie elementów w większe struktury, m. in. dwuwarstwowe kratownice tensegrity.

5.2.1. Moduł *Simplex*

Pierwszą rozważaną strukturą jest pojedynczy moduł *Simplex* (rys. 5.1), powstały na bazie graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, składający się z dwunastu elementów ($n = 12$), w tym trzech zastrzałów i dziewięciu cięgien, oraz sześciu węzłów ($w = 6$) [Fuller, 1962; Emmerich, 1964a; Snelson, 1965; Estrada *i in.*, 2006; Wolkowicz *i in.*, 2007; Skelton i Oliveira, 2010; Chen i Feng, 2012; Zhang *i in.*, 2014, 2018a; Amendola *i in.*, 2018; Cai *i in.*, 2020; Schorr *i in.*, 2020]. Współrzędne węzłów podane zostały w tabeli 5.1, natomiast numeracja elementów – w tabeli 5.2.



Rys. 5.1. Geometria modułu *Simplex*

Tabela 5.1. *Współrzędne węzłów modułu Simplex*

Nr węzła	x	y	z
1	-0,558a	-0,149a	*0*
2	0,149a	0,558a	*0*
3	0,408a	-0,408a	*0*
4	-0,408a	-0,408a	*a*
5	0,558a	-0,149a	*a*
6	-0,149a	0,558a	*a*

Tabela 5.2. *Numeracja elementów modułu Simplex*

	Nr elementu	Nr węzła początkowego	Nr węzła końcowego
zastrzały	1	2	4
	2	6	3
	3	1	5
dolne cięgna	4	1	2
	5	2	3
	6	1	3
górne cięgna	7	4	6
	8	6	5
	9	5	4
środkowe cięgna	10	6	2
	11	5	3
	12	1	4

Rozważany moduł ma dwanaście swobodnych stopni swobody ($m = 12$). Zablokowane zostały następujące stopnie swobody: $q_1, q_3, q_5, q_6, q_7, q_9$. Liczba stopni swobody i liczba elementów w module są sobie równe ($n = m = 12$), dzięki czemu macierz wydłużeń $\mathbf{B}(\in \mathbb{R}^{12\times12})$ oraz macierze $\mathbf{BB}^T$ i $\mathbf{B}^T\mathbf{B}$ są kwadratowe. W związku z powyższym macierze rozkładu SVD także są sobie równe i mają postać:

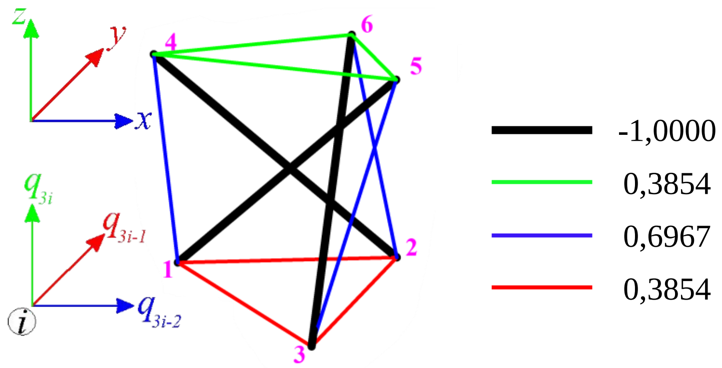
$$\mathbf{H} = \mathbf{L} = diag[3{,}75 \;\; 2{,}42 \;\; 2{,}26 \;\; 1{,}65 \;\; 1{,}45 \;\; 1{,}25 \;\; 1{,}08 \;\; 0{,}76 \;\; 0{,}12 \;\; 0{,}10 \;\; 0{,}04 \;\; 0{,}00].$$

W przypadku obu macierzy $\mathbf{BB}^T$ i $\mathbf{B}^T\mathbf{B}$ zidentyfikowano po jednej zerowej wartości własnej (zerowej wartości na głównej przekątnej macierzy $\mathbf{H}$ i $\mathbf{L}$), co świadczy o istnieniu jednego stanu samonaprężenia i jednego mechanizmu. Wektor własny $\mathbf{y}_{12}$, skorelowany z zerową wartością własną ($\mu_{12} = 0$) znajdującą się na głównej przekątnej macierzy **H,** realizuje siły stanu samonaprężenia. Wektor $\mathbf{y}_{12}$ został znormalizowany tak, aby minimalna jego składowa, odpowiadająca sile w zastrzale, wynosiła -1:

$$\mathbf{y}_{12} = [-1{,}0000 \;\; -1{,}0000 \;\; -1{,}0000 \;\; 0{,}3854 \;\; 0{,}3854 \;\; 0{,}3854 \;\; 0{,}3854 \;\; 0{,}3854 \;\; 0{,}3854 \;\; 0{,}6967 \;\; 0{,}6967 \;\; 0{,}6967].$$

Graficzne przedstawienie wektora samonaprężenia zawarto na rysunku 5.2. Wektor własny $\mathbf{x}_{12}$, skorelowany z zerową wartością własną ($\lambda_{12} = 0$), znajdującą się na głównej przekątnej macierzy **L**, realizuje wektor przemieszczeń związany ze zidentyfikowanym mechanizmem:

$$\mathbf{x}_{12} = [0{,}0000 \quad 0{,}0000 \quad 0{,}0000 \quad 0{,}3922 \quad -0{,}3922 \quad -0{,}1601 \quad 0{,}1436 \quad 0{,}5358 \quad -0{,}1601 \quad -0{,}5358 \quad -0{,}1436 \quad -0{,}1601].$$

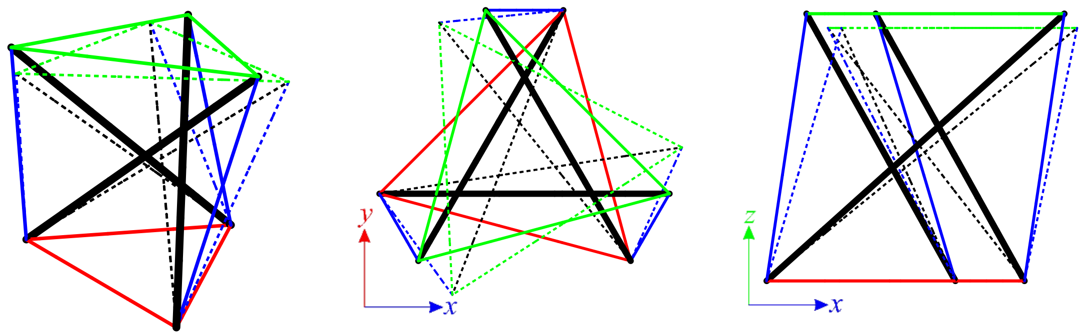


Rys. 5.2. Wartości stanu samonaprężenia $\mathbf{y}_{12}$ modułu *Simplex*

W przypadku modułu *Simplex* wszystkie wartości własne stycznej macierzy sztywności $\mathbf{K}_{T1}$ są dodatnie:

$$\mathbf{O} = diag[2{,}8 \cdot 10^5 \;\; 2{,}0 \cdot 10^5 \;\; 1{,}8 \cdot 10^5 \;\; 1{,}1 \cdot 10^5 \;\; 9{,}8 \cdot 10^4 \;\; 8{,}3 \cdot 10^4 \;\; 7{,}3 \cdot 10^4 \;\; 5{,}0 \cdot 10^4 \;\; 9{,}4 \cdot 10^3 \;\; 7{,}6 \cdot 10^3 \;\; 2{,}4 \cdot 10^3 \;\; 1{,}1 \;\; 1{,}0 \;\; 1{,}0 \;\; 1{,}0 \;\; 1{,}0 \;\; 1{,}0 \;\; 1{,}0],$$

co oznacza, że konstrukcja jest stabilna, a zidentyfikowany mechanizm – infinitezymalny. W przypadku modułu *Simplex* mechanizm ten jest realizowany przez przemieszczenia węzłów górnej płaszczyzny struktury (rys. 5.3).

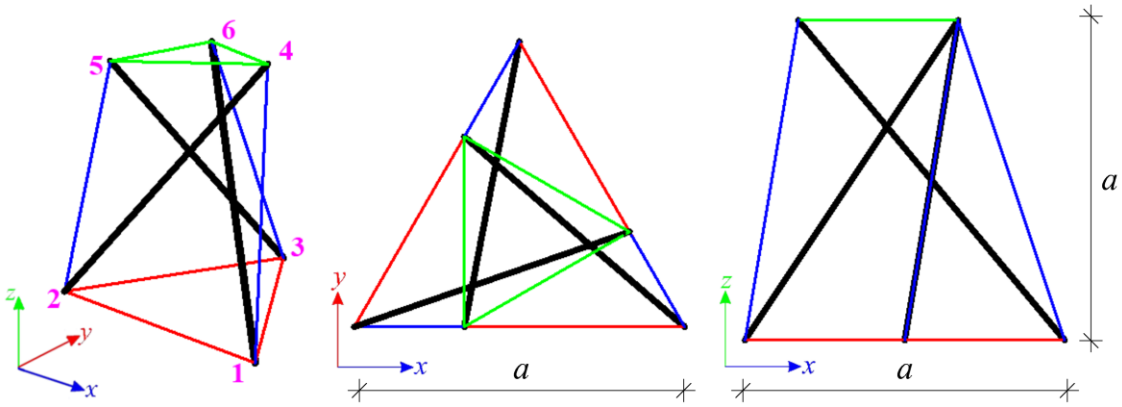


Rys. 5.3. Mechanizm infinitezymalny modułu *Simplex*

W module *Simplex* występują wszystkie cechy tensegrity, tj. struktura jest kratownicą (***K***), w której siatka elementów rozciąganych o zerowej sztywności na ściskanie (***C***) otacza nieciągły układ (***N***) elementów ściskanych (***W***), oraz cechuje się występowaniem stanu samonaprężenia (***S***) i mechanizmu infinitezymalnego (***M***). Identyfikacja wymienionych powyżej cech świadczy o tym, że rozważany moduł zalicza się do idealnych tensegrity.

5.2.2. Moduł *modified Simplex*

Kolejną rozważaną strukturą jest zmodyfikowany moduł *Simplex* – *modified Simplex* (rys. 5.4). Modyfikacja polega na tym, że rzut górnej płaszczyzny modułu wpisuje się w rzut dolnej płaszczyzny, co umożliwia łatwe łączenie pojedynczych struktur w rozbudowane, wielomodułowe konstrukcje, np. płyty tensegrity. Liczba elementów i węzłów jest taka sama jak w przypadku modułu *Simplex* (rys. 5.1). Wymiary zostały dobrane tak, aby można go było wpisać w jednostkowy sześcian. Współrzędne węzłów i numeracja elementów modułu *modified Simplex* podane zostały odpowiednio w tabelach 5.3 i 5.4.



Rys. 5.4. Geometria modułu *modified Simplex*

Tabela 5.3. *Współrzędne węzłów modułu modified Simplex*

Nr węzła	***x***	***y***	***z***
1	0,5a	-0,289a	*0*
2	-0,5a	-0,289a	*0*
3	0	0,577a	*0*
4	0,333a	0	*a*
5	-0,167a	-0,289a	*a*
6	-0,167a	0,289a	*a*

Tabela 5.4. *Numeracja elementów modułu modified Simplex*

	Nr elementu	Nr węzła początkowego	Nr węzła końcowego
zastrzały	**1**	3	5
	2	4	2
	3	1	6
górne cięgna	**4**	4	5
	5	5	6
	6	6	4
dolne cięgna	**7**	3	1
	8	1	2
	9	2	3
środkowe cięgna	**10**	6	3
	11	4	1
	12	5	2

Rozważany moduł ma dwanaście swobodnych stopni swobody $(m = 12)$. Zablokowane zostały następujące stopnie swobody: $q_1, q_3, q_5, q_6, q_7, q_9$. Podobnie jak w przypadku modułu *Simplex*, liczba stopni swobody i liczba elementów w *modified Simplex* są sobie równe $(n = m = 12)$, dzięki czemu macierz wydłużeń $\mathbf{B}(\in \mathbb{R}^{12\times 12})$ oraz macierze $\mathbf{BB}^T$ i $\mathbf{B}^T\mathbf{B}$ są kwadratowe. W związku z powyższym macierze rozkładu SVD także są sobie równe i mają postać:

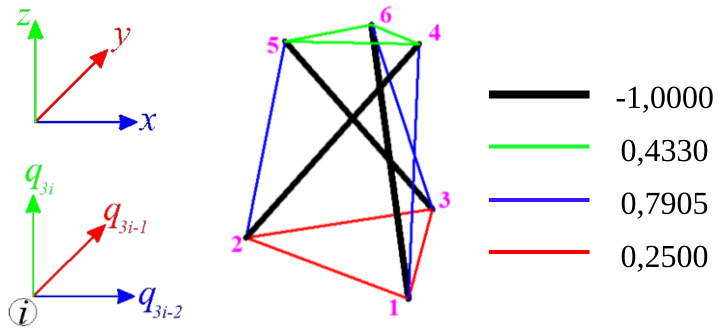
$$\mathbf{H} = \mathbf{L} \\ = diag[3{,}68 \quad 2{,}74 \quad 2{,}32 \quad 2{,}11 \quad 1{,}67 \quad 1{,}43 \quad 1{,}18 \quad 1{,}00 \quad 0{,}43 \quad 0{,}11 \quad 0{,}07 \quad 0{,}00].$$

W przypadku obu macierzy $\mathbf{BB}^T$ i $\mathbf{B}^T\mathbf{B}$ zidentyfikowano po jednej zerowej wartości własnej (zerowej wartości na głównej przekątnej macierzy **H** i **L**), co świadczy o istnieniu jednego stanu samonaprężenia i jednego mechanizmu. Wektor własny $\mathbf{y}_{12}$, skorelowany z zerową wartością własną $(\mu_{12} = 0)$ znajdującą się na głównej przekątnej macierzy **H,** realizuje siły stanu samonaprężenia. Wektor $\mathbf{y}_{12}$ został znormalizowany tak, aby minimalna jego składowa, odpowiadająca sile w zastrzale, wynosiła -1:

$$\mathbf{y}_{12} = [-1{,}0000 \quad -1{,}0000 \quad -1{,}0000 \quad 0{,}4330 \quad 0{,}4330 \quad 0{,}4330 \\ 0{,}2500 \quad 0{,}2500 \quad 0{,}2500 \quad 0{,}7905 \quad 0{,}7905 \quad 0{,}7905].$$

Graficzne przedstawienie wektora samonaprężenia zawarto na rysunku 5.5. Wektor własny $\mathbf{x}_{12}$, skorelowany z zerową wartością własną $(\lambda_{12} = 0)$, znajdującą się na głównej przekątnej macierzy **L**, realizuje wektor przemieszczeń związany ze zidentyfikowanym mechanizmem:

$$\mathbf{x}_{12} = [0{,}0000 \;\; 0{,}0000 \;\; 0{,}0000 \;\; 0{,}0000 \;\; -0{,}5547 \;\; 0{,}1601 \;\; -0{,}4804 \;\; 0{,}2773 \;\; 0{,}1601 \;\; 0{,}4804 \;\; 0{,}2773 \;\; 0{,}1602].$$

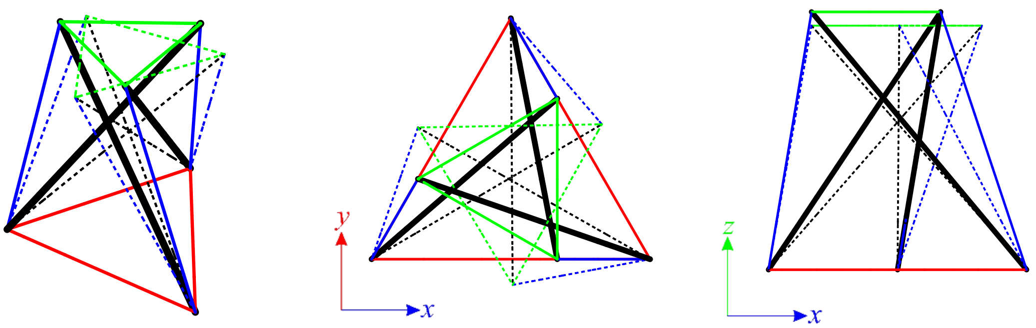


Rys. 5.5. Wartości stanu samonaprężenia $\mathbf{y}_{12}$ modułu *modified Simplex*

W przypadku modułu *modified Simplex* wszystkie wartości własne stycznej macierzy sztywności $\mathbf{K}_{T1}$ są dodatnie:

$$\mathbf{O} = diag[4{,}0\cdot10^5 \;\; 2{,}4\cdot10^5 \;\; 2{,}3\cdot10^5 \;\; 2{,}0\cdot10^5 \;\; 1{,}4\cdot10^5 \;\; 1{,}3\cdot10^5 \;\; 8{,}5\cdot10^4 \;\; 7{,}1\cdot10^4 \;\; 3{,}2\cdot10^4 \;\; 9{,}0\cdot10^3 \;\; 4{,}7\cdot10^3 \;\; 2{,}1 \;\; 1{,}0 \;\; 1{,}0 \;\; 1{,}0 \;\; 1{,}0 \;\; 1{,}0 \;\; 1{,}0],$$

co oznacza, że konstrukcja jest stabilna, a zidentyfikowany mechanizm – infinitezymalny. W przypadku modułu *modified Simplex* mechanizm ten jest realizowany przez przemieszczenia węzłów górnej płaszczyzny struktury (rys. 5.6).



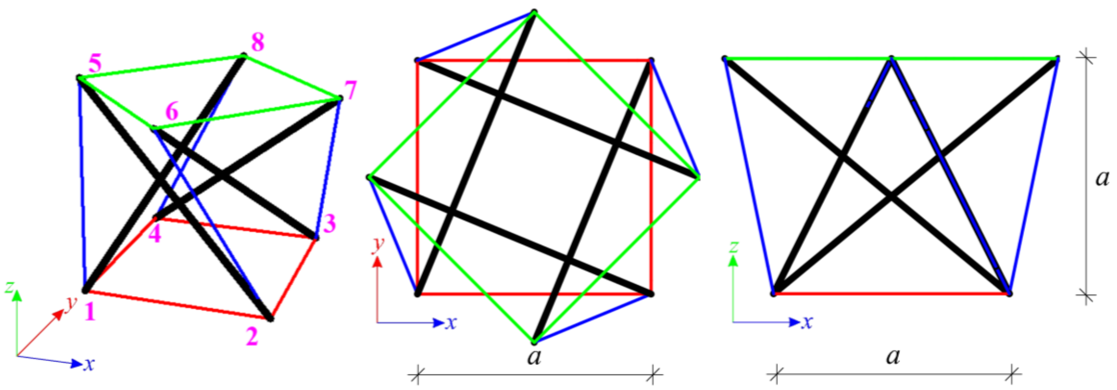
Rys. 5.6. Mechanizm infinitezymalny modułu *modified Simplex*

W module *modified Simplex* występują wszystkie cechy tensegrity, tj. struktura jest kratownicą (***K***), w której siatka elementów rozciąganych o zerowej sztywności na ściskanie (***C***) otacza nieciągły układ (***N***) elementów ściskanych (***W***), oraz cechuje się występowaniem stanu samonaprężenia (***S***) i mechanizmu infinitezymalnego (***M***).

Identyfikacja wymienianych powyżej cech świadczy o tym, że rozważana konstrukcja zalicza się do idealnych tensegrity.

5.2.3. Moduł *Quartex*

Kolejną rozważaną strukturą jest moduł *Quartex,* powstały na bazie graniastosłupa prawidłowego czworokątnego (rys. 5.7) i składający a się z szesnastu elementów ($n = 16$), w tym czterech zastrzałów i dwunastu cięgien, oraz ośmiu węzłów ($w = 8$) [Kebiche *i in.*, 1999; Estrada *i in.*, 2006; Tran i Lee, 2010; Oliveto i Sivaselvan, 2011; Shekastehband *i in.*, 2012; Faroughi i Lee, 2014b; Zhang *i in.*, 2018a; Martyniuk-Sienkiewicz i Gilewski, 2022]. Współrzędne węzłów modułu *Quartex* podane zostały w tabeli 5.5, natomiast numeracja elementów – w tabeli 5.6.



Rys. 5.7. Geometria modułu *Quartex*

Tabela 5.5. *Współrzędne węzłów modułu Quartex*

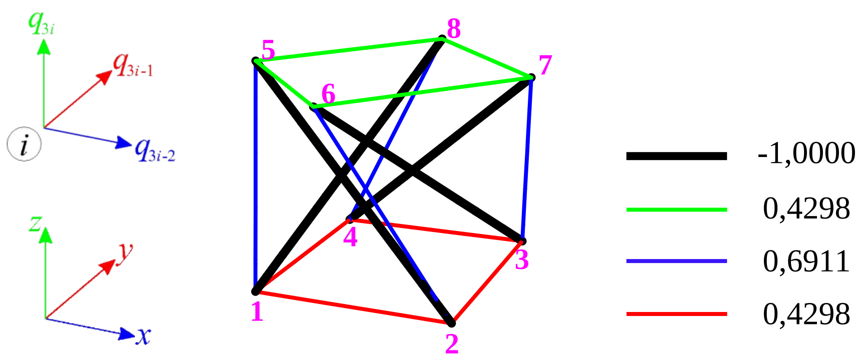
Nr węzła	*x*	*y*	*z*
1	-0,5a	-0,5a	0
2	0,5a	-0,5a	0
3	0,5a	0,5a	0
4	-0,5a	0,5a	0
5	-0,707a	0	a
6	0	-0,707a	a
7	0,707a	0	a
8	0	0,707a	a

Tabela 5.6. *Numeracja elementów modułu Quartex*

	Nr elementu	Nr węzła początkowego	Nr węzła końcowego
zastrzały	**1**	4	7
	2	5	2
	3	8	1
	4	3	6
górne cięgna	**5**	5	6
	6	6	7
	7	7	8
	8	8	5
dolne cięgna	**9**	1	2
	10	2	3
	11	3	4
	12	4	1
środkowe cięgna	**13**	4	8
	14	3	7
	15	2	6
	16	1	5

Rozważany moduł ma szesnaście swobodnych stopni swobody ($m = 16$). Zablokowane zostały następujące przemieszczenia: $q_1, q_3, q_5, q_6, q_7, q_9, q_{11}, q_{12}$. Liczba stopni swobody i liczba elementów w module są sobie równe ($n = m = 16$), dzięki czemu macierz wydłużeń $\mathbf{B}(\in \mathbb{R}^{16\times16})$ oraz macierze $\mathbf{BB}^T$ i $\mathbf{B}^T\mathbf{B}$ są kwadratowe. W związku z powyższym macierze rozkładu SVD także są sobie równe i mają postać:

$$\mathbf{H} = \mathbf{L} = diag[3{,}46 \quad 3{,}09 \quad 3{,}09 \quad 2{,}69 \quad 1{,}86 \quad 1{,}83 \quad 1{,}83 \quad 1{,}64 \quad 1{,}08 \quad 0{,}74 \quad 0{,}74 \quad 0{,}63 \quad 0{,}11 \quad 0{,}07 \quad 0{,}07 \quad 0].$$



Rys. 5.8. Znormalizowane siły stanu samonaprężenia $\mathbf{y}_{16}$ modułu *Quartex*

W przypadku obu macierzy $\mathbf{BB}^T$ i $\mathbf{B}^T\mathbf{B}$ zidentyfikowano po jednej zerowej wartości własnej (zerowej wartości na głównej przekątnej macierzy $\mathbf{H}$ i $\mathbf{L}$), co świadczy o istnieniu jednego stanu samonaprężenia i jednego mechanizmu. Wektor własny $\mathbf{y}_{16}$, skorelowany z zerową wartością własną ($\mu_{16} = 0$) znajdującą się na głównej przekątnej macierzy **H,** realizuje siły stanu samonaprężenia. Wektor $\mathbf{y}_{16}$ został znormalizowany tak, aby minimalna jego składowa, odpowiadająca sile w zastrzale, wynosiła -1:

$$\mathbf{y}_{16} = [-1{,}0000 \quad -1{,}0000 \quad -1{,}0000 \quad -1{,}0000 \quad 0{,}4298 \quad 0{,}4298 \quad 0{,}4298 \quad 0{,}4298 \quad 0{,}4298 \quad 0{,}4298 \quad 0{,}4298 \quad 0{,}4298 \quad 0{,}6911 \quad 0{,}6911 \quad 0{,}6911 \quad 0{,}6911].$$

Na rysunku 5.8 przedstawiono graficzne siły stanu samonaprężenia.

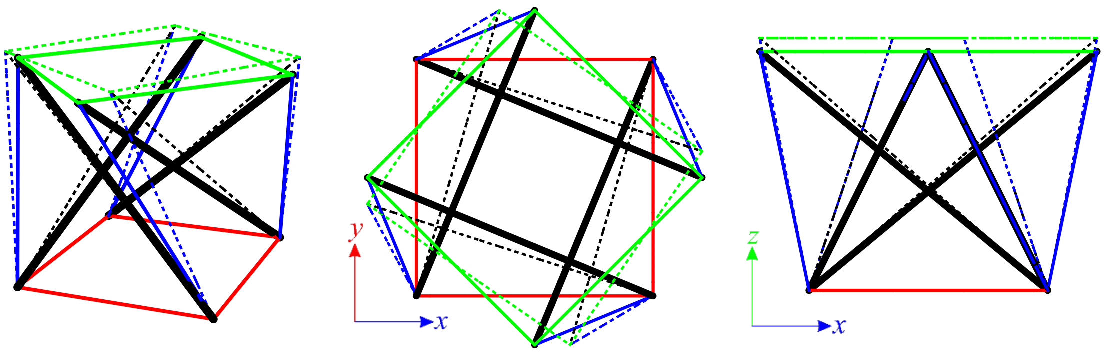
Wektor własny $\mathbf{x}_{16}$, skorelowany z zerową wartością własną ($\lambda_{16} = 0$), znajdującą się na głównej przekątnej macierzy **L**, realizuje wektor przemieszczeń związany ze zidentyfikowanym mechanizmem:

$$\mathbf{x}_{16} = [0{,}0000 \quad 0{,}0000 \quad 0{,}0000 \quad 0{,}0000 \quad 0{,}0000 \quad 0{,}4472 \quad -0{,}2236 \quad -0{,}4472 \quad 0{,}0000 \quad -0{,}2236 \quad 0{,}0000 \quad -0{,}4472 \quad -0{,}2236 \quad 0{,}4472 \quad 0{,}0000 \quad -0{,}2236].$$

W przypadku analizowanego modułu wszystkie wartości własne stycznej macierzy sztywności $\mathbf{K}_{T1}$ są dodatnie:

$$\mathbf{O} = diag[2{,}6 \cdot 10^5 \;\; 2{,}3 \cdot 10^5 \;\; 2{,}3 \cdot 10^5 \;\; 1{,}9 \cdot 10^5 \;\; 1{,}3 \cdot 10^5 \;\; 1{,}2 \cdot 10^5 \;\; 1{,}2 \cdot 10^5 \;\; 1{,}1 \cdot 10^5 \;\; 6{,}9 \cdot 10^4 \;\; 4{,}8 \cdot 10^4 \;\; 4{,}8 \cdot 10^4 \;\; 3{,}9 \cdot 10^4 \;\; 7{,}2 \cdot 10^3 \;\; 4{,}8 \cdot 10^3 \;\; 4{,}8 \cdot 10^3 \;\; 1{,}0 \;\; 1{,}0 \;\; 1{,}0 \;\; 1{,}0 \;\; 1{,}0 \;\; 1{,}0 \;\; 1{,}0 \;\; 1{,}0 \;\; 0{,}7],$$

co oznacza, że struktura jest stabilna, a zidentyfikowany mechanizm jest infinitezymalny. W przypadku modułu *Quartex* mechanizm ten jest realizowany przez przemieszczenia węzłów górnej płaszczyzny struktury (rys. 5.9).

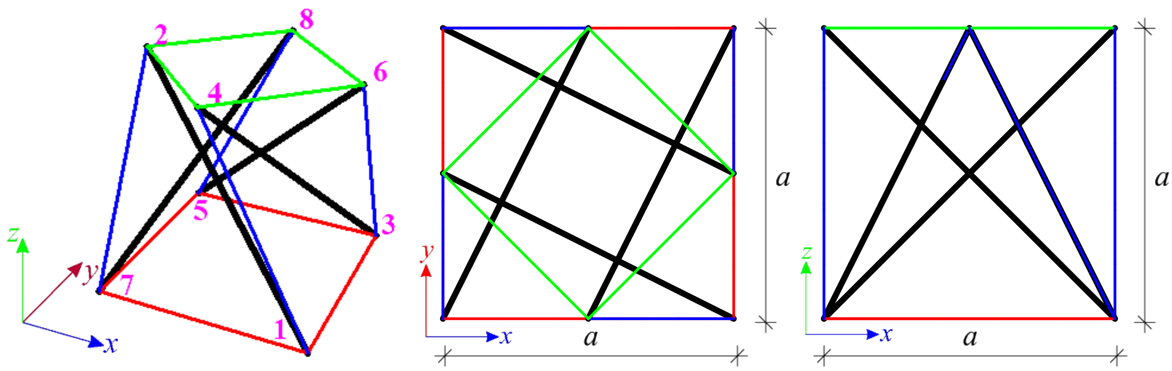


Rys. 5.9. Mechanizm infinitezymalny modułu *Quartex*

W module *Quartex* występują wszystkie cechy tensegrity, tj. struktura jest kratownicą (***K***), w której siatka elementów rozciąganych o zerowej sztywności na ściskanie (***C***) otacza nieciągły układ (***N***) elementów ściskanych (***W***), oraz cechuje się występowaniem stanu samonaprężenia (***S***) i mechanizmu infinitezymalnego (***M***). Identyfikacja wymienianych powyżej cech świadczy o tym, że rozważana struktura zalicza się do idealnych tensegrity.

5.2.4. Moduł *modified Quartex*

Kolejną strukturą jest pojedynczy zmodyfikowany moduł *Quartex* – *modified Quartex* (rys. 5.10). Modyfikacja polega na tym, że rzut górnej płaszczyzny modułu wpisuje się w rzut dolnej płaszczyzny, co umożliwia łatwe łączenie pojedynczych struktur w rozbudowane, wielomodułowe konstrukcje, np. płyty tensegrity. Liczba elementów i węzłów jest taka sama jak w przypadku modułu *Quartex* (rys. 5.7). Wymiary zostały dobrane tak, aby można go było wpisać w jednostkowy sześcian. Współrzędne węzłów modułu *modified Quartex* podane zostały w tabeli 5.7, natomiast numeracja elementów – w tabeli 5.8.



Rys. 5.10. Geometria modułu *modified Quartex*

Tabela 5.7. *Współrzędne węzłów modułu modified Quartex*

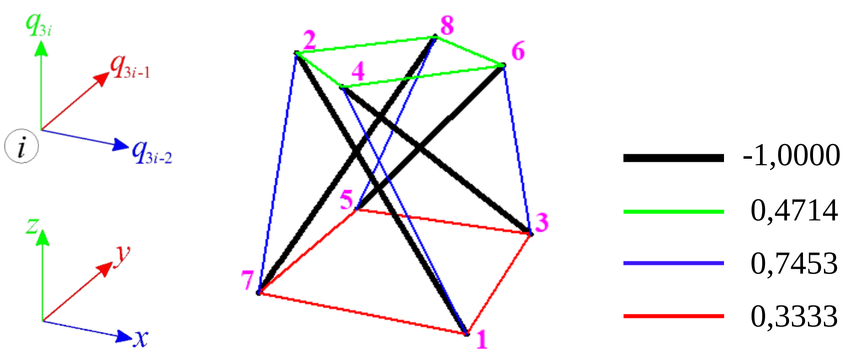
Nr węzła	*x*	*y*	*z*
1	0,5a	-0,5a	0
2	-0,5a	0	a
3	0,5a	0,5a	0
4	0	-0,5a	a
5	-0,5a	0,5a	0
6	0,5a	0	a
7	-0,5a	-0,5a	0
8	0	0,5a	a

Tabela 5.8. *Numeracja elementów modułu modified Quartex*

	Nr elementu	Nr węzła początkowego	Nr węzła końcowego
zastrzały	**1**	1	2
	2	3	4
	3	5	6
	4	7	8
dolne cięgna	**5**	1	3
	6	1	7
	7	5	7
	8	3	5
środkowe cięgna	**9**	3	6
	10	1	4
	11	5	8
	12	2	7
górne cięgna	**13**	2	8
	14	2	4
	15	4	6
	16	6	8

Rozważany moduł ma szesnaście swobodnych stopni swobody $(m = 16)$. Zablokowane zostały następujące przemieszczenia: $q_1, q_3, q_8, q_9, q_{13}, q_{15}, q_{20}, q_{21}$. Liczba stopni swobody i liczba elementów w module są sobie równe $(n = m = 16)$, dzięki czemu macierz wydłużeń $\mathbf{B}(\in \mathbb{R}^{16\times16})$ oraz macierze $\mathbf{BB}^T$ i $\mathbf{B}^T\mathbf{B}$ są kwadratowe. W związku z powyższym macierze rozkładu SVD także są sobie równe i mają postać:

$$\mathbf{H} = \mathbf{L} = diag[2{,}72\ 2{,}71\ 2{,}71\ \ 2{,}7\ \ 1{,}39\ \ 1{,}34\ \ 1{,}34\ \ 1{,}29\ \ 1{,}0\ \ 0{,}96\ \ 0{,}96\ \ 0{,}88\ \ 0{,}23\ \ 0{,}1\ \ 0{,}1\ \ 0{,}0].$$



Rys. 5.11. Znormalizowane siły stanu samonaprężenia $\mathbf{y}_{16}$ modułu *modified Quartex*

W przypadku obu macierzy $\mathbf{BB}^T$ i $\mathbf{B}^T\mathbf{B}$ zidentyfikowano po jednej zerowej wartości własnej (zerowej wartości na głównej przekątnej macierzy $\mathbf{H}$ i $\mathbf{L}$), co świadczy o istnieniu jednego stanu samonaprężenia i jednego mechanizmu. Wektor własny $\mathbf{y}_{16}$, skorelowany z zerową wartością własną ($\mu_{16} = 0$) znajdującą się na głównej przekątnej macierzy **H,** realizuje siły stanu samonaprężenia. Wektor $\mathbf{y}_{16}$ został znormalizowany tak, aby minimalna jego składowa, odpowiadająca sile w zastrzale, wynosiła -1:

$$\mathbf{y}_{16} = [-1{,}0000 \quad -1{,}0000 \quad -1{,}0000 - 1{,}0000 \quad 0{,}3333 \quad 0{,}3333 \quad 0{,}3333 \quad 0{,}3333$$
$$0{,}7454 \quad 0{,}7454 \quad 0{,}7455 \quad 0{,}7454 \quad 0{,}4714 \quad 0{,}4714 \quad 0{,}4714 \quad 0{,}4714].$$

Na rysunku 5.11 przedstawiono graficzne siły stanu samonaprężenia.

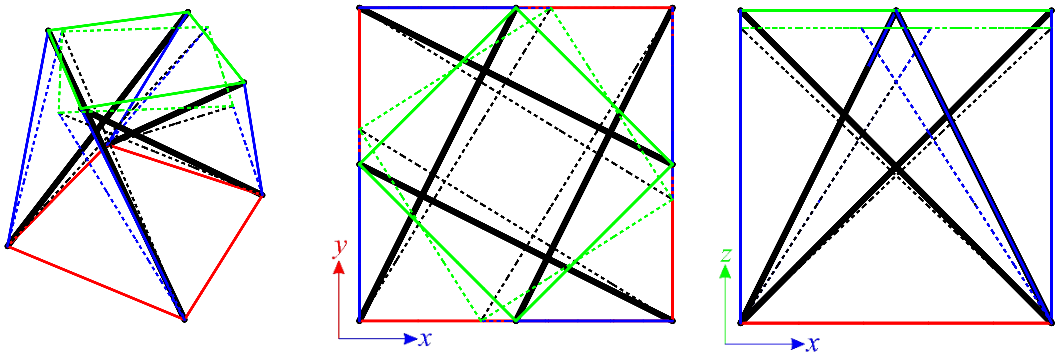
Wektor własny $\mathbf{x}_{16}$, skorelowany z zerową wartością własną ($\lambda_{16} = 0$), znajdującą się na głównej przekątnej macierzy $\mathbf{L}$, realizuje wektor przemieszczeń związany ze zidentyfikowanym mechanizmem:

$$\mathbf{x}_{16} = [0{,}0000 \quad 0{,}0000 \quad -0{,}4472 \quad 0{,}2236 \quad 0{,}0000 \quad 0{,}4472 \quad 0{,}0000 \quad 0{,}2236$$
$$0{,}0000 \quad 0{,}0000 \quad 0{,}4472 \quad 0{,}2236 \quad 0{,}0000 \quad -0{,}4472 \quad 0{,}0000 \quad 0{,}2236],$$

W przypadku analizowanego modułu wszystkie wartości własne stycznej macierzy sztywności $\mathbf{K}_{T1}$ są dodatnie:

$$\mathbf{O} = diag[6{,}7\cdot10^8 \;\; 6{,}7\cdot10^8 \;\; 6{,}7\cdot10^8 \;\; 6{,}7\cdot10^8 \;\; 2{,}7\cdot10^8 \;\; 2{,}6\cdot10^8 \;\; 2{,}6\cdot10^8$$
$$2{,}5\cdot10^8 \;\; 2{,}1\cdot10^8 \;\; 2\cdot10^8 \;\; 2\cdot10^8 \;\; 1{,}8\cdot10^8 \; 3{,}8\cdot10^7 \;\; 1{,}7\cdot10^7$$
$$1{,}7\cdot10^7 \;\; 1{,}07 \;\; 1{,}0 \;\; 1{,}0 \;\; 1{,}0 \;\; 1{,}0 \;\; 1{,}0 \;\; 1{,}0 \;\; 1{,}0],$$

co oznacza, że struktura jest stabilna, a zidentyfikowany mechanizm jest infinitezymalny. W przypadku modułu *modified Quartex* mechanizm ten jest realizowany przez przemieszczenia węzłów górnej płaszczyzny struktury (rys. 5.12). Zablokowanie przemieszczeń węzłów 2, 4, 6 oraz 8 będzie skutkowało brakiem mechanizmu.

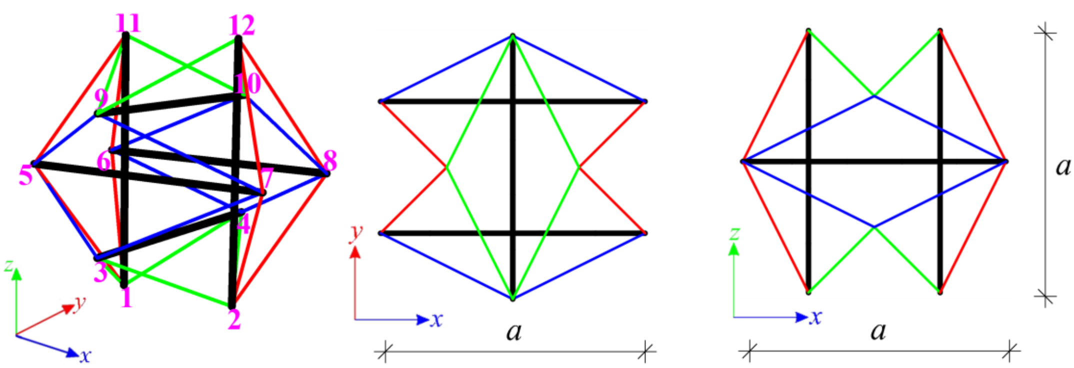


Rys. 5.12. Mechanizm infinitezymalny modułu *modified Quartex*

W pojedynczym module *modified Quartex* występują wszystkie cechy tensegrity, tj. struktura jest kratownicą (***K***), w której siatka elementów rozciąganych o zerowej sztywności na ściskanie (***C***) otacza nieciągły układ (***N***) elementów ściskanych (***W***), oraz cechuje się występowaniem stanu samonaprężenia (***S***) i mechanizmu infinitezymalnego (***M***). Identyfikacja wymienianych powyżej cech świadczy o tym, że rozważana struktura zalicza się do idealnych tensegrity.

5.2.5. Moduł *expanded Octahedron*

Kolejną rozważaną strukturą jest pojedynczy moduł *expanded Octahedron* (rys. 5.13), powstały na bazie bryły rozszerzonego ośmiościanu, składający się z trzydziestu elementów ($n = 30$), w tym sześciu zastrzałów i dwudziestu czterech cięgien, oraz dwunastu węzłów ($w = 12$) [Murakami i Nishimura, 2001; Ponzi, 2002; Sultan i Skelton, 2002; Lazopoulos i Lazopoulou, 2006; Estrada *i in.*, 2006; Xian i Luo, 2010; Guest, 2011; Micheletti, 2012; Chandio *i in.*, 2020; Fernández-Ruiz *i in.*, 2021]. Współrzędne węzłów podane zostały w tabeli 5.9, natomiast numeracja elementów – w tabeli 5.10.



Rys. 5.13. Geometria modułu *expanded Octahedron*

Tabela 5.9. *Współrzędne węzłów modułu expanded Octahedron*

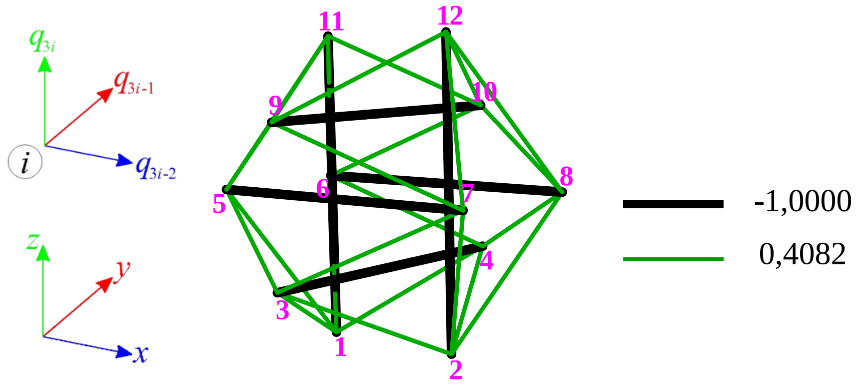
Nr węzła	*x*	*y*	*z*
1	0,25*a*	0,5*a*	0
2	0,75*a*	0,5*a*	0
3	0,5*a*	0	0,25*a*
4	0,5*a*	*a*	0,25*a*
5	0	0,25*a*	0,5*a*
6	0	0,75*a*	0,5*a*
7	*a*	0,25*a*	0,5*a*
8	*a*	0,75*a*	0,5*a*
9	0,5*a*	0	0,75*a*
10	0,5*a*	*a*	0,75*a*
11	0,25*a*	0,5*a*	*a*
12	0,75*a*	0,5*a*	*a*

Tabela 5.10. *Numeracja elementów modułu expanded Octahedron*

	Nr elementu	Nr węzła początkowego	Nr węzła końcowego
zastrzały	**1**	12	2
	2	11	1
	3	3	4
	4	9	10
	5	5	7
	6	6	8
cięgna podstawy	**7**	3	2
	8	2	4
	9	1	3
	10	1	4
	11	12	10
	12	11	9
	13	9	12
	14	11	10
zewnętrzne cięgna	**15**	8	2
	16	2	7
	17	5	1
	18	6	1
	19	12	7
	20	8	12
	21	6	11
	22	5	11
wewnętrzne cięgna	**23**	3	7
	24	5	3
	25	8	4
	26	6	4
	27	10	8
	28	7	9
	29	10	6
	30	9	5

Rozważany moduł ma trzydzieści swobodnych stopni swobody ($m = 30$). Zablokowane zostały następujące przemieszczenia: $q_{14}, q_{15}, q_{16}, q_{18}, q_{23}, q_{24}$. Liczba stopni swobody i liczba elementów w module są sobie równe ($n = m = 30$), dzięki czemu macierz wydłużeń $\mathbf{B}(\in \mathbb{R}^{30\times30})$ oraz macierze $\mathbf{BB}^T$ i $\mathbf{B}^T\mathbf{B}$ są kwadratowe. W związku z powyższym macierze rozkładu SVD także są sobie równe i mają postać:

$$\mathbf{H} = \mathbf{L} = diag[4{,}87\ 4{,}17\ 4{,}06\ 3{,}82\ 3{,}41\ 3{,}32\ 3{,}22\ 3{,}09\ 2{,}88\ 2{,}82\ 2{,}24\ 1{,}84\ 1{,}77\ 1{,}60\ 1{,}41\ 1{,}00\ 0{,}96\ 0{,}83\ 0{,}69\ 0{,}68\ 0{,}59\ 0{,}54\ 0{,}35\ 0{,}32\ 0{,}17\ 0{,}12\ 0{,}11\ 0{,}06\ 0{,}04\ 0{,}00].$$



Rys. 5.14. Znormalizowane siły stanu samonaprężenia $\mathbf{y}_{30}$ modułu *expanded Octahedron*

W przypadku obu macierzy $\mathbf{BB}^T$ i $\mathbf{B}^T\mathbf{B}$ zidentyfikowano po jednej zerowej wartości własnej (zerowej wartości na głównej przekątnej macierzy $\mathbf{H}$ i $\mathbf{L}$), co świadczy o istnieniu jednego stanu samonaprężenia i jednego mechanizmu. Wektor własny $\mathbf{y}_{30}$, skorelowany z zerową wartością własną ($\mu_{30} = 0$) znajdującą się na głównej przekątnej macierzy $\mathbf{H}$, realizuje siły stanu samonaprężenia. Wektor $\mathbf{y}_{30}$ został znormalizowany tak, aby minimalna jego składowa, odpowiadająca sile w zastrzale, wynosiła -1:

$$\mathbf{y}_{30} = [-1{,}0000\ -1{,}0000\ -1{,}0000\ -1{,}0000\ -1{,}0000\ -1{,}0000\ 0{,}4082].$$

Na rysunku 5.14 przedstawiono graficzne siły stanu samonaprężenia.

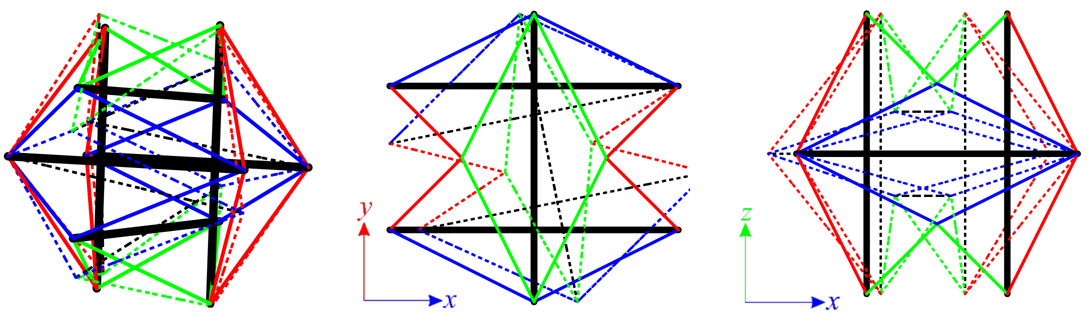
Wektor własny $\mathbf{x}_{16}$, skorelowany z zerową wartością własną ($\lambda_{30} = 0$), znajdującą się na głównej przekątnej macierzy $\mathbf{L}$, realizuje wektor przemieszczeń związany ze zidentyfikowanym mechanizmem:

$$\mathbf{x}_{30} = [-0{,}3000\ \ 0{,}1000\ \ 0{,}0000\ \ 0{,}1000\ \ -0{,}1000\ \ 0{,}0000\ \ -0{,}3000\ \ 0{,}0000\ \ -0{,}2000\ \ 0{,}1000\ \ 0{,}0000\ \ -0{,}2000\ \ -0{,}2000\ \ 0{,}4000\ \ -0{,}2000\ \ -0{,}4000\ \ 0{,}0000\ \ 0{,}0000\ \ -0{,}3000\ \ 0{,}0000\ \ 0{,}2000\ \ 0{,}1000\ \ 0{,}0000\ \ 0{,}2000\ \ -0{,}3000\ \ 0{,}1000\ \ 0{,}0000\ \ 0{,}1000\ \ -0{,}1000\ \ 0{,}0000],$$

W przypadku analizowanego modułu wszystkie wartości własne stycznej macierzy sztywności $\mathbf{K}_{T1}$ są dodatnie:

$$\mathbf{O} = diag[6{,}0 \cdot 10^5\ \ 5{,}1 \cdot 10^5\ \ 5{,}0 \cdot 10^5\ \ 4{,}7 \cdot 10^5\ \ 4{,}3 \cdot 10^5\ \ 3{,}8 \cdot 10^5\ \ 3{,}6 \cdot 10^5\ \ 3{,}4 \cdot 10^5\ \ 3{,}2 \cdot 10^5\ \ 3{,}1 \cdot 10^5\ \ 2{,}4 \cdot 10^5\ \ 2{,}0 \cdot 10^5\ \ 2{,}0 \cdot 10^5\ \ 1{,}7 \cdot 10^5\ \ 1{,}5 \cdot 10^5\ \ 1{,}1 \cdot 10^5\ \ 1{,}1 \cdot 10^5\ \ 9{,}2 \cdot 10^4\ \ 7{,}7 \cdot 10^4\ \ 7{,}3 \cdot 10^4\ \ 7{,}1 \cdot 10^4\ \ 5{,}9 \cdot 10^4\ \ 3{,}9 \cdot 10^4\ \ 3{,}8 \cdot 10^4\ \ 2{,}0 \cdot 10^4\ \ 1{,}4 \cdot 10^4\ \ 1{,}3 \cdot 10^4\ \ 6{,}2 \cdot 10^4\ \ 4{,}9 \cdot 10^3\ \ 1{,}3\ \ 1{,}0\ \ 1{,}0\ \ 1{,}0\ \ 1{,}0\ \ 1{,}0\ \ 1{,}0],$$

co oznacza, że struktura jest stabilna, a zidentyfikowany mechanizm (rys. 5.15) jest infinitezymalny.



Rys. 5.15. Mechanizm infinitezymalny modułu *expanded Octahedron*

W module *expanded Octahedron* występują wszystkie cechy tensegrity, tj. struktura jest kratownicą (***K***), w której siatka elementów rozciąganych o zerowej sztywności na ściskanie (***C***) otacza nieciągły układ (***N***) elementów ściskanych (***W***), oraz cechuje się występowaniem stanu samonaprężenia (***S***) i mechanizmu infinitezymalnego (***M***). Identyfikacja wymienianych powyżej cech świadczy o tym, że rozważana struktura zalicza się do idealnych tensegrity.

5.2.6. Podsumowanie

W tabeli 5.11 zawarto podsumowanie rezultatów analizy jakościowej analizowanych pojedynczych modułów. Wszystkie moduły posiadały tą samą liczbę elementów i swobodnych stopni swobody ($n = m$). W każdym przypadku uzyskano po jednej zerowej wartości własnej w macierzach $\mathbf{BB}^T$ i $\mathbf{B}^T\mathbf{B}$, w związku z czym moduły charakteryzują się występowaniem jednego stanu samonaprężenia oraz jednego mechanizmu ($lss = lm$). Ostatnie dwie kolumny tabeli 5.11 zawierają sprawdzenie poprawności przeprowadzonej analizy zgodnie ze wzorem Maxwella (3.9).

We wszystkich rozważanych modułach zostały zidentyfikowane wszystkie charakterystyczne cechy tensegrity, co oznacza, że są to przykłady idealnych tensegrity.

Tabela 5.11. *Wyniki analizy jakościowej pojedynczych modułów*

Moduł	Liczba węzłów	Liczba stopni swobody	Liczba elementów	Liczba zastrzałów	Liczba mechanizmów	Liczba stanów samonaprężenia	Sprawdzenie (3.9)	
	w	m	n	lz	lm	lss	*n-m*	*lss-lm*
Simplex	6	12	12	3	1	1	0	0
modified Simplex	6	12	12	3	1	1	0	0
Quartex	8	16	16	4	1	1	0	0
modified Quartex	8	16	16	4	1	1	0	0
expanded Octahedron	6	30	16	6	1	1	0	0

5.3. Struktury zbudowane z modułu *Simplex*

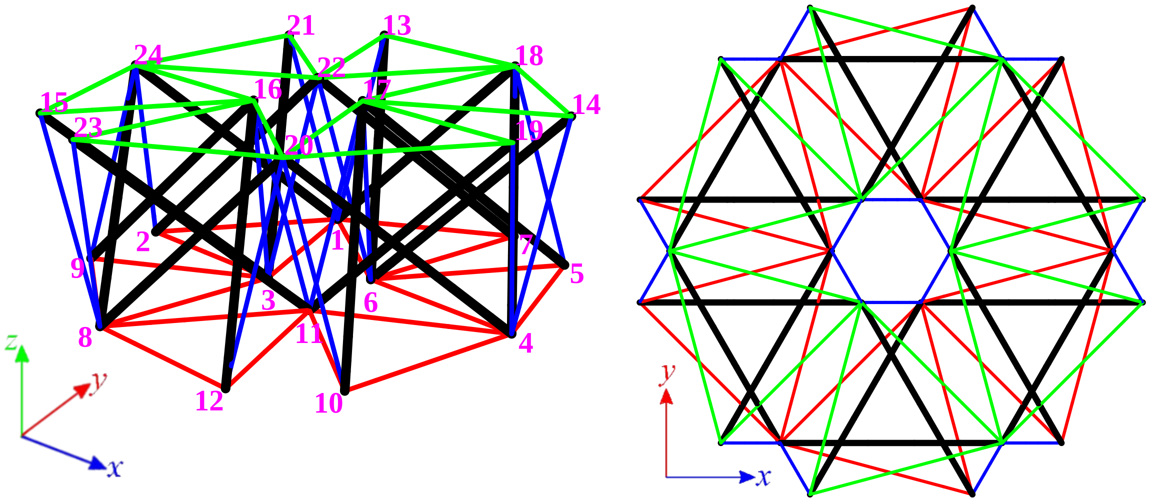
Pierwszą analizowaną grupą konstrukcji są dwuwarstwowe kratownice zbudowane z modułów *Simplex*. Kolejno przeprowadzono analizę jakościową płyty 6-modułowej, płyty 10-modułowej, płyty 14-modułowej, płyty 18-modułowej i płyty 24-modułowej.

5.3.1. 6-modułowa płyta *Simplex*

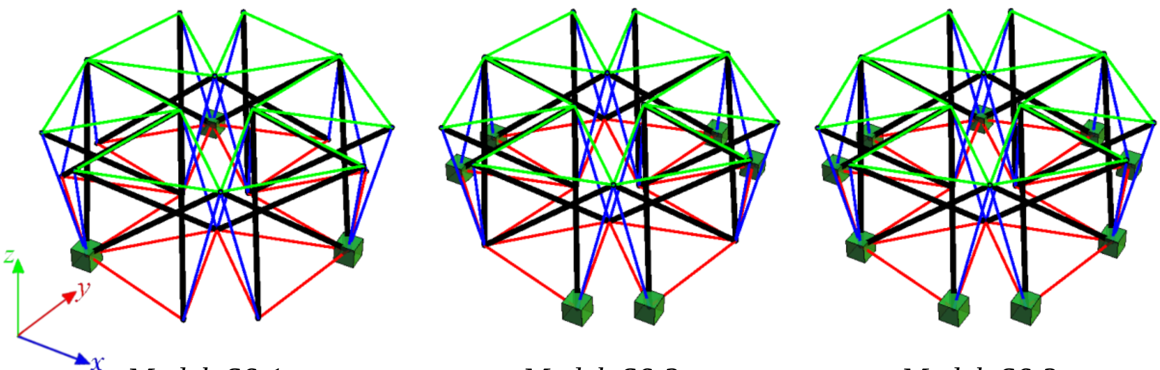
Pierwszą rozważaną strukturą jest płyta zbudowana z sześciu modułów S*implex* (rys. 5.16), która składa się z 72 elementów ($n = 72$) i 24 węzłów ($w = 24$). Rozpatrzono następujące schematy podparcia (rys. 5.17):

– ***model S6-1*** – płyta swobodnie podparta w płaszczyźnie dolnej w trzech węzłach (9 więzów),

– ***model S6-2*** – płyta swobodnie podparta w płaszczyźnie dolnej w sześciu węzłach (18 więzów),
– ***model S6-3*** – płyta swobodnie podparta w płaszczyźnie dolnej w dziewięciu węzłach (27 więzów).



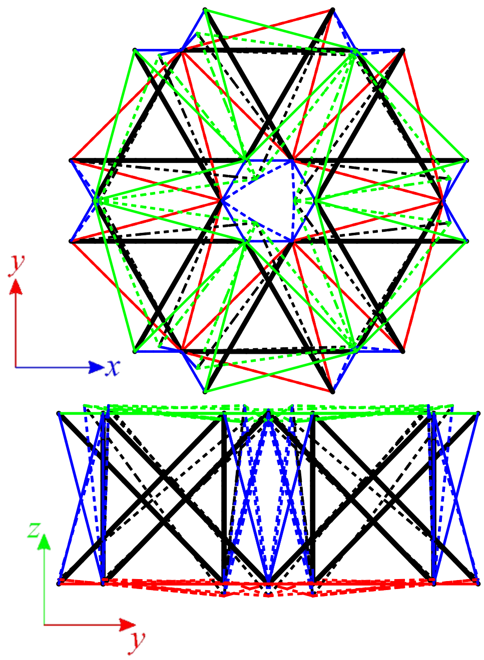
Rys. 5.16. Geometria 6-modułowej płyty *Simplex*



Model S6-1 *Model S6-2* *Model S6-3*

Rys. 5.17. Modele analizowanych 6-modułowych płyt *Simplex*

Wyniki analizy jakościowej 6-modułowych płyt *Simplex* przedstawiono w tabeli 5.12. We wszystkich analizowanych modelach zidentyfikowane zostały stany samonaprężenia (***S***), przy czym ich liczba zależy od sposobu podparcia. Otrzymane stany samonaprężenia w różny sposób definiują elementy konstrukcji, ale uwzględnienie stanów samonaprężenia otrzymanych w przypadku pojedynczego modułu (rys. 5.2) pozwala zidentyfikować rodzaje elementów (siły od stanów samonaprężenia w elementach wspólnych były stosownie powielone). Wszystkie modele charakteryzują się cechami ***W*** i ***C***, jednak, z uwagi na połączenia modułów w układzie węzeł-węzeł, struktury te nie spełniają cechy o nieciągłości elementów ściskanych (***N***). Modele S6-1 i S6-2 charakteryzują się jednym mechanizmem (***M***), wobec czego zaliczono je do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 1. Model S6-3, ze względu na brak mechanizmów, zakwalifikowano do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 2. Dla modeli S6-1 i S6-2 uzyskano podobną postać deformacji (rys. 5.18), w której mechanizm realizowany jest przede wszystkim przez górną płaszczyznę, dolne węzły przemieszczają się nieznacznie i tylko w kierunku *z*.



Rys. 5.18. Mechanizm 6-modułowej płyty *Simplex*

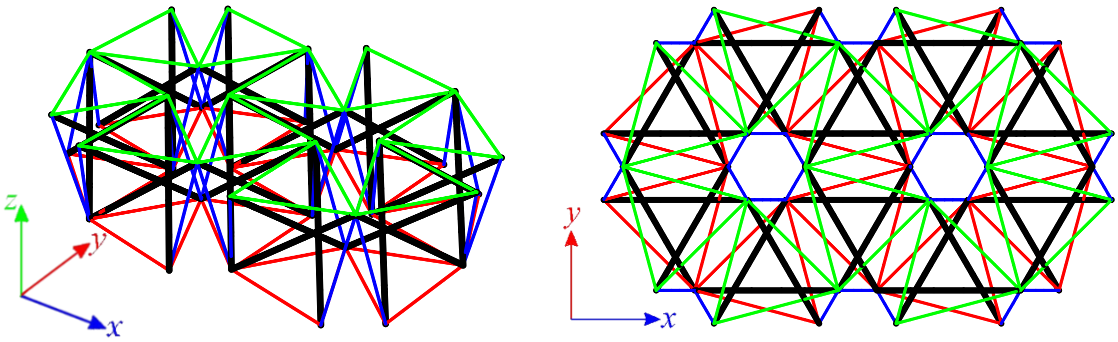
Tabela 5.12. *Rezultaty analizy jakościowej dla 6-modułowych płyt Simplex*

Model	Liczba węzłów (*w*)	Liczba elementów (*n*)	Liczba swobodnych stopni swobody *(m)*	Liczba mechanizmów *(lm)*	Liczba stanów samonaprężenia *(lss)*	Sprawdzenie *(n-m)*	Sprawdzenie *(lss-lm)*	Klasyfikacja
S6-1	24	72	63	1	10	9	9	konstrukcje o cechach tensegrity klasy 1
S6-2			54	1	19	18	18	
S6-3			45	0	27	27	27	konstrukcje o cechach tensegrity klasy 2

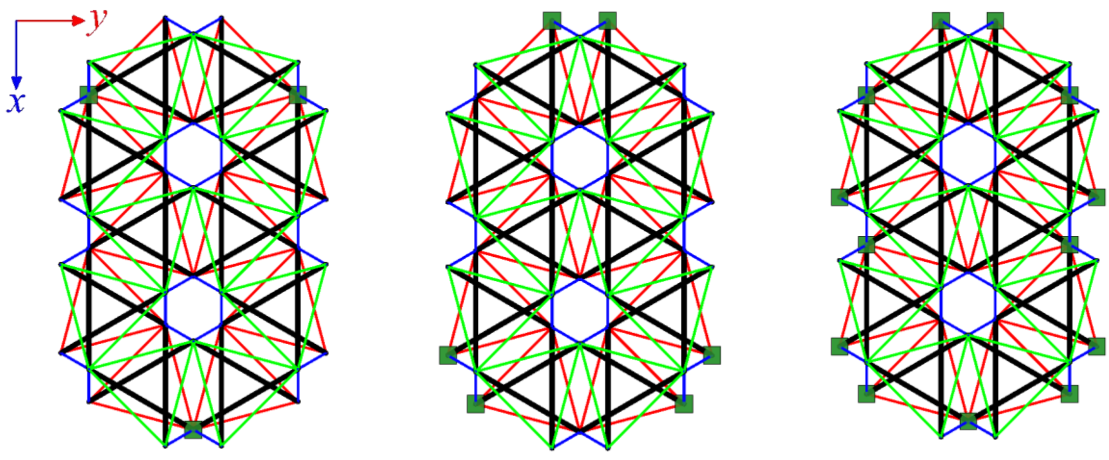
5.3.2. 10-modułowa płyta *Simplex*

Kolejną rozważaną strukturą jest płyta zbudowana z dziesięciu modułów S*implex* (rys. 5.19), która składa się z 120 elementów ($n = 120$) i 38 węzłów ($w = 38$). Rozważono następujące schematy podparcia (rys. 5.20):

– ***model S10-1*** – płyta swobodnie podparta w płaszczyźnie dolnej w trzech węzłach (9 więzów),
– ***model S10-2*** – płyta swobodnie podparta w płaszczyźnie dolnej w sześciu węzłach (18 więzów),
– ***model S10-3*** – płyta swobodnie podparta w płaszczyźnie dolnej na obwodzie (39 więzów).



Rys. 5.19. Geometria 10-modułowej płyty *Simplex*



Model S10-1 *Model S10-2* *Model S10-3*

Rys. 5.20. Modele analizowanych 10-modułowych płyt *Simplex*

Wyniki analizy jakościowej 10-modułowych płyt *Simplex* przedstawiono w tabeli 5.13. Wszystkie modele charakteryzują się cechami: ***S***, ***W*** i ***C***, jednak, z uwagi na połączenia modułów w układzie węzeł-węzeł, struktury te nie spełniają cechy o nieciągłości elementów ściskanych (***N***). W tym przypadku tylko model S10-1, charakteryzujący się występowaniem mechanizmu (***M***), zakwalifikowano do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 1, natomiast dwa pozostałe, tj. modele S10-2 i S10-3, ze względu na brak mechanizmu – do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 2.

Tabela 5.13. *Rezultaty analizy jakościowej dla 10-modułowych płyt Simplex*

<table>
<tr><th rowspan="2">Model</th><th rowspan="2">Liczba węzłów (w)</th><th rowspan="2">Liczba elementów (n)</th><th rowspan="2">Liczba swobodnych stopni swobody (m)</th><th rowspan="2">Liczba mechanizmów (lm)</th><th rowspan="2">Liczba stanów samonaprężenia (lss)</th><th colspan="2">Sprawdzenie</th><th rowspan="2">Klasyfikacja</th></tr>
<tr><th>(n-m)</th><th>(lss-lm)</th></tr>
<tr><td>S10-1</td><td rowspan="3">38</td><td rowspan="3">120</td><td>105</td><td>1</td><td>16</td><td>15</td><td>15</td><td>konstrukcje o cechach tensegrity klasy 1</td></tr>
<tr><td>S10-2</td><td>96</td><td>0</td><td>24</td><td>24</td><td>24</td><td rowspan="2">konstrukcje o cechach tensegrity klasy 2</td></tr>
<tr><td>S10-3</td><td>75</td><td>0</td><td>45</td><td>45</td><td>45</td></tr>
</table>

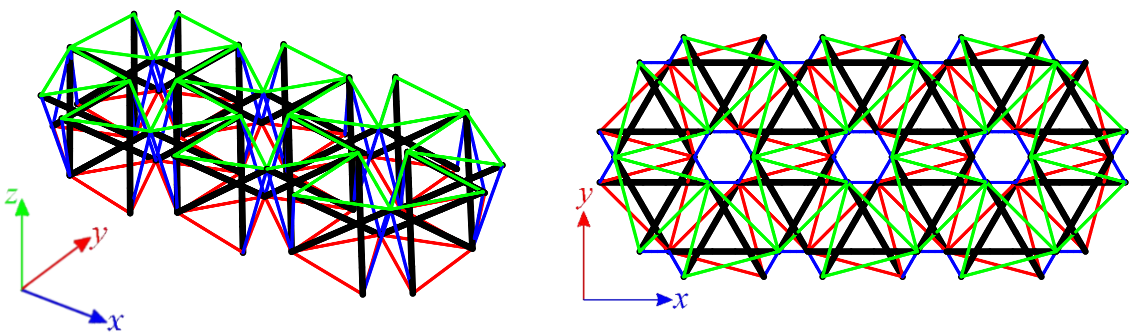
5.3.3. 14-modułowa płyta *Simplex*

Następną rozpatrywaną konstrukcją jest płyta zbudowana z czternastu modułów S*implex* (rys. 5.21), która składa się z 168 elementów ($n = 168$) i 52 węzłów ($w = 52$). Rozważono następujące schematy podparcia (rys. 5.22):

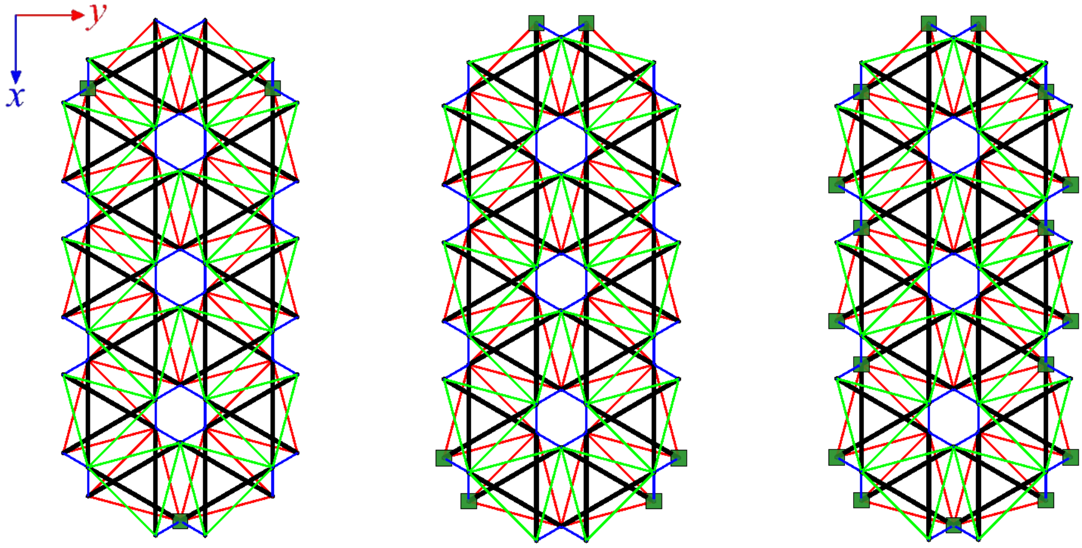
– ***model S14-1*** – płyta swobodnie podparta w płaszczyźnie dolnej w trzech węzłach (9 więzów),

– ***model S14-2*** – płyta swobodnie podparta w płaszczyźnie dolnej w sześciu węzłach (18 więzów),

– ***model S14-3*** – płyta swobodnie podparta w płaszczyźnie dolnej na obwodzie (51 więzów).



Rys. 5.21. Geometria 14-modułowej płyty *Simplex*



Model S14-1 *Model S14-2* *Model S14-3*

Rys. 5.22. Modele analizowanych 14-modułowych płyt *Simplex*

Wyniki analizy jakościowej 14-modułowych płyt *Simplex* przedstawiono w tabeli 5.14. Wszystkie modele charakteryzują się cechami: ***S***, ***W*** i ***C***, jednak, z uwagi na połączenia modułów w układzie węzeł-węzeł, struktury te nie spełniają cechy o nieciągłości elementów ściskanych (***N***). Tylko model S14-1, charakteryzujący się występowaniem mechanizmu (***M***), zaliczono do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 1. Pozostałe modele, tj. modele S14-2 i S14-3, z uwagi na brak mechanizmu, zakwalifikowano do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 2.

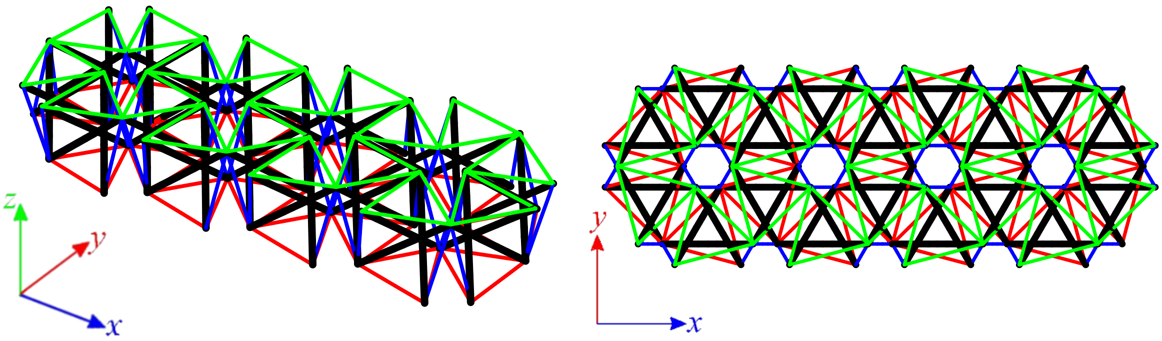
Tabela 5.14. *Rezultaty analizy jakościowej dla 14-modułowych płyt Simplex*

<table>
<tr><th rowspan="2">Model</th><th rowspan="2">Liczba węzłów (w)</th><th rowspan="2">Liczba elementów (n)</th><th rowspan="2">Liczba swobodnych stopni swobody (m)</th><th rowspan="2">Liczba mechanizmów (lm)</th><th rowspan="2">Liczba stanów samonaprężenia (lss)</th><th colspan="2">Sprawdzenie</th><th rowspan="2">Klasyfikacja</th></tr>
<tr><th>(n-m)</th><th>(lss-lm)</th></tr>
<tr><td>S14-1</td><td rowspan="3">52</td><td rowspan="3">168</td><td>147</td><td>1</td><td>22</td><td>21</td><td>21</td><td>konstrukcje o cechach tensegrity klasy 1</td></tr>
<tr><td>S14-2</td><td>138</td><td>0</td><td>30</td><td>30</td><td>30</td><td rowspan="2">konstrukcje o cechach tensegrity klasy 2</td></tr>
<tr><td>S14-3</td><td>105</td><td>0</td><td>63</td><td>63</td><td>63</td></tr>
</table>

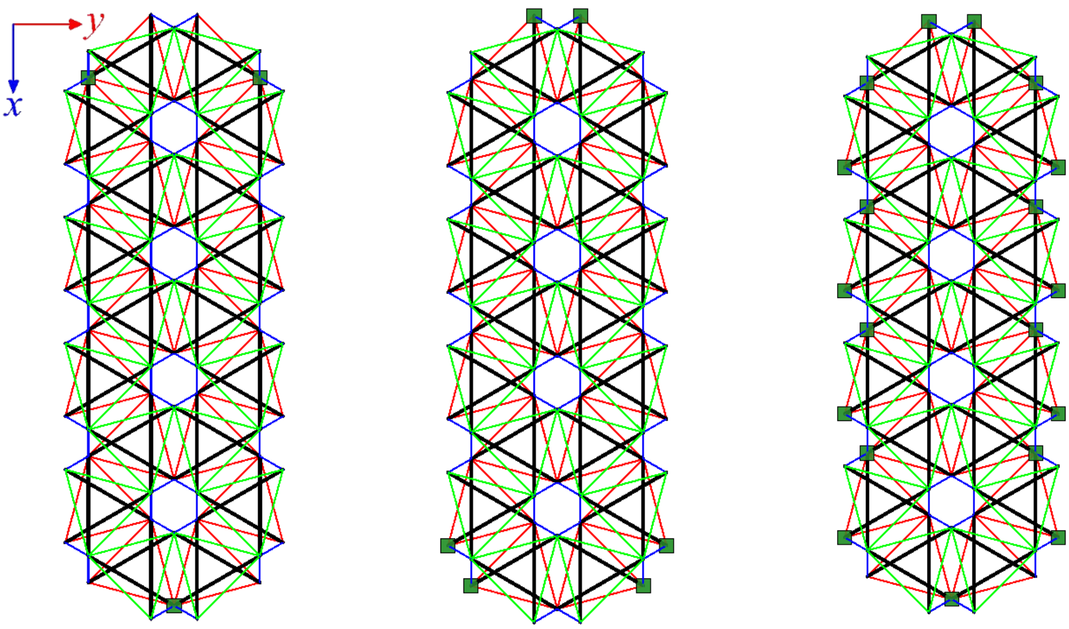
5.3.4. 18-modułowa płyta *Simplex*

Kolejną rozpatrywaną konstrukcją jest płyta zbudowana z osiemnastu modułów S*implex* (rys. 5.23), która składa się z 216 elementów ($n = 216$) i 66 węzłów ($w = 66$). Rozważono następujące schematy podparcia (rys. 5.24):

- ***model S18-1*** – płyta swobodnie podparta w płaszczyźnie dolnej w trzech węzłach (9 więzów),
- ***model S18-2*** – płyta swobodnie podparta w płaszczyźnie dolnej w sześciu węzłach (18 więzów),
- ***model S18-3*** – płyta swobodnie podparta w płaszczyźnie dolnej na obwodzie (57 więzów).



Rys. 5.23. Geometria 18-modułowej płyty *Simplex*



Model S18-1 *Model S18-2* *Model S18-3*

Rys. 5.24. Modele analizowanych 18-modułowych płyt *Simplex*

Wyniki analizy jakościowej 18-modułowych płyt *Simplex* przedstawiono w tabeli 5.15. Wszystkie modele charakteryzują się cechami: ***S***, ***W*** i ***C***, jednak, z uwagi na połączenia modułów w układzie węzeł-węzeł, struktury te nie spełniają cechy o nieciągłości elementów ściskanych (***N***). Tylko model S18-1, charakteryzujący się występowaniem mechanizmu (***M***), zaliczono do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 1. Pozostałe modele, tj. modele S18-2 i S18-3, ze względu na brak mechanizmu, zakwalifikowano do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 2.

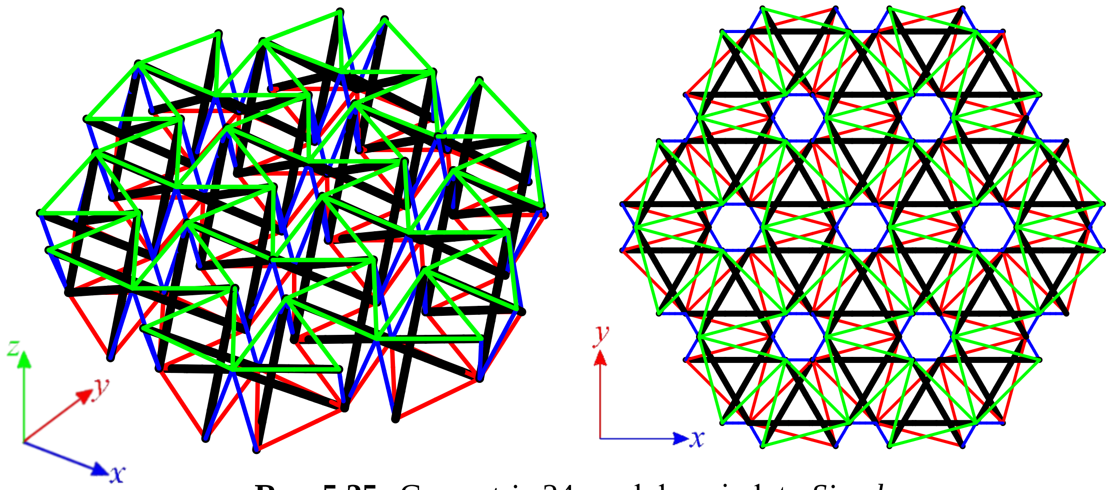
Tabela 5.15. *Rezultaty analizy jakościowej dla 18-modułowych płyt Simplex*

<table>
<tr><th rowspan="2">Model</th><th rowspan="2">Liczba węzłów (w)</th><th rowspan="2">Liczba elementów (n)</th><th rowspan="2">Liczba swobodnych stopni swobody (m)</th><th rowspan="2">Liczba mechanizmów (lm)</th><th rowspan="2">Liczba stanów samonaprężenia (lss)</th><th colspan="2">Sprawdzenie</th><th rowspan="2">Klasyfikacja</th></tr>
<tr><th>(n-m)</th><th>(lss-lm)</th></tr>
<tr><td>S18-1</td><td rowspan="3">66</td><td rowspan="3">216</td><td>189</td><td>1</td><td>28</td><td>27</td><td>27</td><td>konstrukcje o cechach tensegrity klasy 1</td></tr>
<tr><td>S18-2</td><td>180</td><td>0</td><td>36</td><td>36</td><td>36</td><td rowspan="2">konstrukcje o cechach tensegrity klasy 2</td></tr>
<tr><td>S18-3</td><td>141</td><td>0</td><td>75</td><td>75</td><td>75</td></tr>
</table>

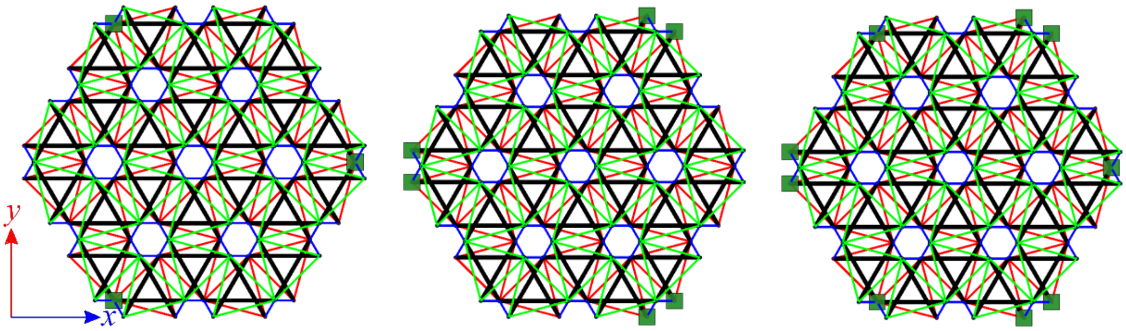
5.3.5. 24-modułowa płyta *Simplex*

Następną rozważaną strukturą jest płyta zbudowana z dwudziestu czterech modułów S*implex* (rys. 5.25), która składa się z 228 elementów ($n = 228$) i 84 węzłów ($w = 84$). Rozpatrzono następujące schematy podparcia (rys. 5.26):

- ***model S24-1*** – płyta swobodnie podparta w płaszczyźnie dolnej w trzech węzłach (9 więzów),
- ***model S24-2*** – płyta swobodnie podparta w płaszczyźnie dolnej w sześciu węzłach (18 więzów),
- ***model S24-3*** – płyta swobodnie podparta w płaszczyźnie dolnej w dziewięciu węzłach (27 więzów).



Rys. 5.25. Geometria 24-modułowej płyty *Simplex*



Rys. 5.26. Modele analizowanych 24-modułowych płyt *Simplex*

Wyniki analizy jakościowej 24-modułowych płyt *Simplex* przedstawiono w tabeli 5.16. Wszystkie modele charakteryzują się cechami: ***S***, ***W*** i ***C***, jednak, z uwagi na połączenia modułów w układzie węzeł-węzeł, struktury te nie spełniają cechy o nieciągłości elementów ściskanych (***N***). Modele S24-1 i S24-2, charakteryzujące się posiadaniem mechanizmu (***M***), zaliczono do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 1, natomiast model S24-3, ze względu na brak mechanizmu – do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 2.

Tabela 5.16. *Rezultaty analizy jakościowej dla 24-modułowych płyt Simplex*

Model	**Liczba węzłów (*w*)**	**Liczba elementów (*n*)**	**Liczba swobodnych stopni swobody *(m)***	**Liczba mechanizmów *(lm)***	**Liczba stanów samonaprężenia *(lss)***	**Sprawdzenie**		**Klasyfikacja**
						(n-m)	***(lss-lm)***	
MS24-1	84	288	243	1	46	45	45	konstrukcje o cechach tensegrity klasy 1
MS24-2			234	1	55	54	54	
MS24-3			225	0	63	63	63	konstrukcje o cechach tensegrity klasy 2

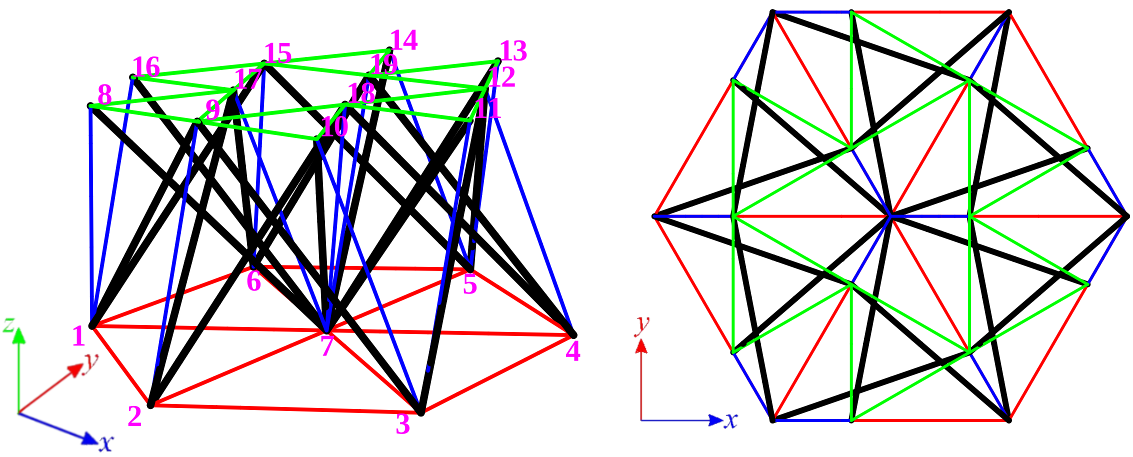
5.4. Struktury zbudowane z modułu *modified Simplex*

Kolejną analizowaną grupą konstrukcji są dwuwarstwowe kratownice zbudowane z modułów *modified Simplex*. Kolejno przeprowadzono analizę jakościową płyty 6-modułowej, płyty 10-modułowej, płyty 14-modułowej, płyty 18-modułowej i płyty 24-modułowej.

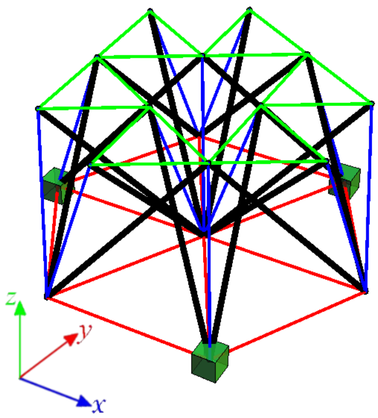
5.4.1. 6-modułowa płyta *modified Simplex*

Pierwszą rozważaną strukturą jest płyta zbudowana z sześciu modułów *modified Simplex* (rys. 5.27), która składa się z 60 elementów ($n = 60$) i 19 węzłów ($w = 19$). Rozpatrzono następujące schematy podparcia (Rys. 5.28):

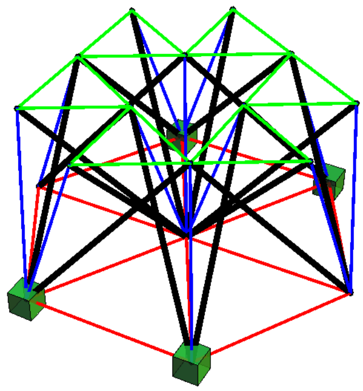
– ***model MS6-1*** – płyta swobodnie podparta w płaszczyźnie dolnej w trzech węzłach (9 więzów),
– ***model MS6-2*** – płyta swobodnie podparta w płaszczyźnie dolnej w czterech węzłach (12 więzów),
– ***model MS6-3*** – płyta swobodnie podparta w płaszczyźnie dolnej w sześciu węzłach (18 więzów),
– ***model MS6-4*** – płyta swobodnie podparta w płaszczyźnie górnej w trzech węzłach (9 więzów),
– ***model MS6-5*** – płyta swobodnie podparta w płaszczyźnie górnej w trzech węzłach (9 więzów),
– ***model MS6-6*** – płyta swobodnie podparta w płaszczyźnie dolnej w siedmiu węzłach (21 więzów).



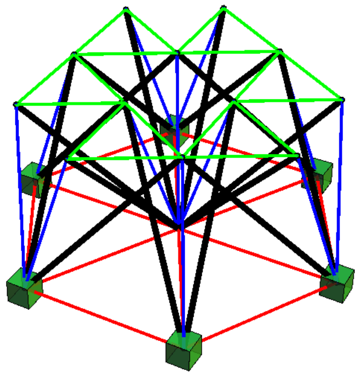
Rys. 5.27. Geometria 6-modułowej płyty *modified Simplex*



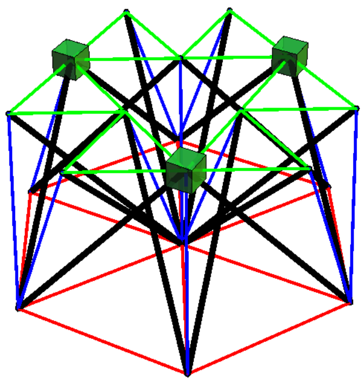
Model MS6-1



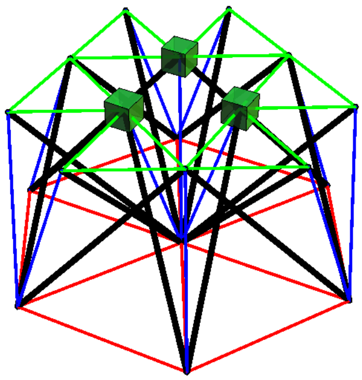
Model MS6-2



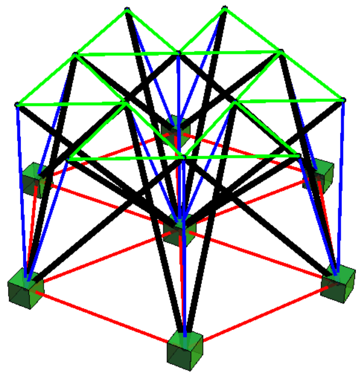
Model MS6-3



Model MS6-4



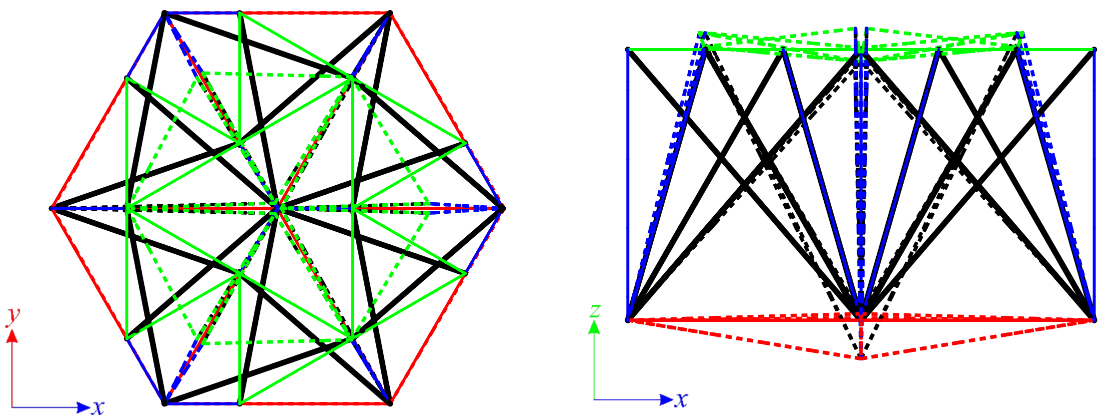
Model MS6-5



Model MS6-6

Rys. 5.28. Modele analizowanych płyt 6-modułowych *modified Simplex*

Wyniki analizy jakościowej 6-modułowych płyt *modified Simplex* przedstawiono w tabeli 5.17. We wszystkich analizowanych modelach zidentyfikowane zostały stany samonaprężenia (***S***), przy czym ich liczba zależy od sposobu podparcia. Otrzymane stany samonaprężenia w różny sposób definiują elementy konstrukcji, ale uwzględnienie stanów samonaprężenia otrzymanych w przypadku pojedynczego modułu (rys. 5.3) pozwala zidentyfikować rodzaje elementów (siły od stanów samonaprężenia w elementach wspólnych były stosownie powielone). Wszystkie modele charakteryzują się cechami ***W*** i ***C***, jednak, z uwagi na połączenia modułów w układzie węzeł-węzeł, struktury te nie spełniają cechy o nieciągłości elementów ściskanych (***N***). Modele MS6-1 – MS6-4 charakteryzujące się występowaniem mechanizmu (***M***) zaliczono do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 1. Modele MS6-5 i MS6-6, ze względu na brak mechanizmów, należy zakwalifikować do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 2. Dla wszystkich modeli charakteryzujących się występowaniem mechanizmu, tj. MS6-1 – MS6-4 zdeformowana postać konstrukcji wygląda podobnie (rys. 5.29).



Rys. 5.29. Mechanizm 6-modułowej płyty *modified Simplex*

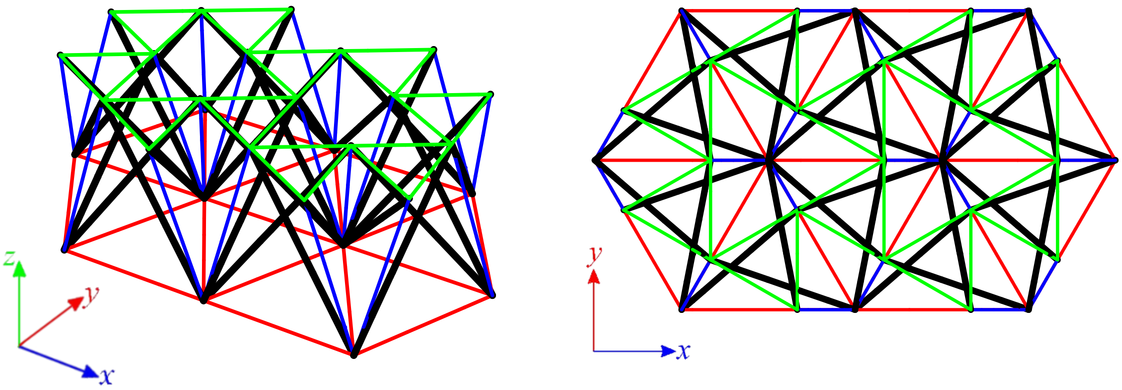
Tabela 5.17. *Rezultaty analizy jakościowej dla 6-modułowych płyt modified Simplex*

Model	Liczba węzłów *(w)*	Liczba elementów *(n)*	Liczba swobodnych stopni swobody *(m)*	Liczba mechanizmów *(lm)*	Liczba stanów samonaprężenia *(lss)*	Sprawdzenie *(n-m)*	Sprawdzenie *(lss-lm)*	Klasyfikacja
MS6-1	19	60	48	1	13	12	12	konstrukcje o cechach tensegrity klasy 1
MS6-2			45	1	16	15	15	
MS6-3			39	1	22	21	21	
MS6-4			48	1	13	12	12	
MS6-5			48	0	12	12	12	konstrukcje o cechach tensegrity klasy 2
MS6-6			36	0	24	24	24	

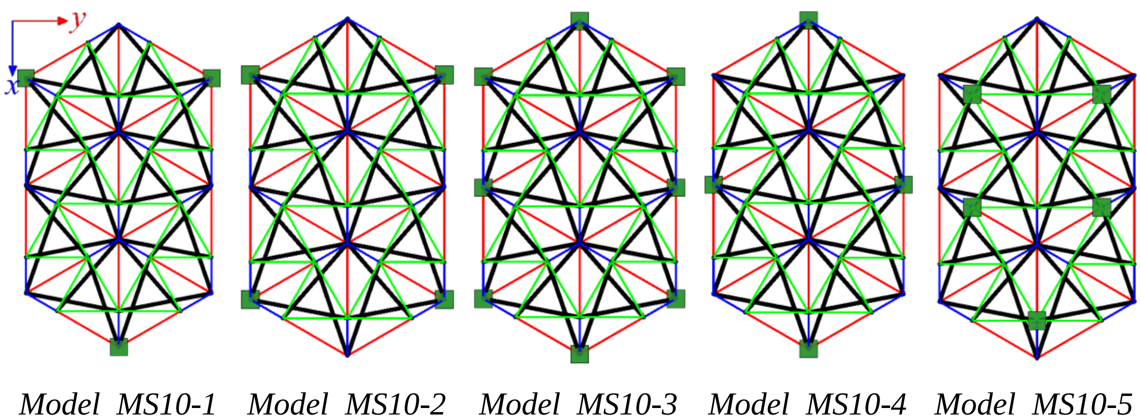
5.4.2. 10-modułowa płyta *modified Simplex*

Kolejną rozpatrywaną konstrukcją jest 10-modułowa płyta *modified Simplex* (rys. 5.30), która składa się z 98 elementów ($n = 98$) i 29 węzłów ($w = 29$). Rozpatrzono trzy schematy podparcia (rys. 5.31):

- ***model MS10-1*** – płyta swobodnie podparta w płaszczyźnie dolnej w trzech węzłach (9 więzów),
- ***model MS10-2*** – płyta swobodnie podparta w płaszczyźnie dolnej w czterech węzłach (12 więzów),
- ***model MS10-3*** – płyta swobodnie podparta w płaszczyźnie dolnej w ośmiu węzłach (24 więzy),
- ***model MS10-4*** – płyta swobodnie podparta w płaszczyźnie dolnej w czterech węzłach (12 więzów),
- ***model MS10-5*** – płyta swobodnie podparta w płaszczyźnie górnej w pięciu węzłach (15 więzów).



Rys. 5.30. Geometria 10-modułowej płyty *modified Simplex*



Rys. 5.31. Modele analizowanych płyt 10-modułowych *modified Simplex*

Wyniki analizy jakościowej 10-modułowych płyt *modified Simplex* przedstawiono w tabeli 5.18. Wszystkie modele charakteryzują się cechami: ***S***, ***W*** i ***C***, jednak, z uwagi na połączenia modułów w układzie węzeł-węzeł, struktury te nie spełniają cechy o nieciągłości elementów ściskanych (***N***). Modele MS10-1 i MS10-2, charakteryzujące się występowaniem mechanizmu (***M***), zaliczono do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 1. Modele MS10-3 – MS10-5, ze względu na brak mechanizmu, należy zakwalifikować do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 2.

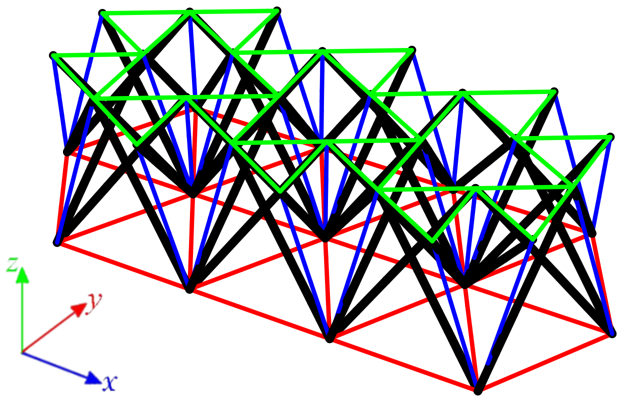
Tabela 5.18. *Rezultaty analizy jakościowej dla 10-modułowych płyt modified Simplex*

<table>
<tr><th rowspan="2">Model</th><th rowspan="2">Liczba węzłów (w)</th><th rowspan="2">Liczba elementów (n)</th><th rowspan="2">Liczba swobodnych stopni swobody (m)</th><th rowspan="2">Liczba mechanizmów (lm)</th><th rowspan="2">Liczba stanów samonaprężenia (lss)</th><th colspan="2">Sprawdzenie</th><th rowspan="2">Klasyfikacja</th></tr>
<tr><th>(n-m)</th><th>(lss-lm)</th></tr>
<tr><td>MS10-1</td><td rowspan="5">29</td><td rowspan="5">98</td><td>78</td><td>1</td><td>21</td><td>20</td><td>20</td><td rowspan="2">konstrukcje o cechach tensegrity klasy 1</td></tr>
<tr><td>MS10-2</td><td>75</td><td>1</td><td>24</td><td>23</td><td>23</td></tr>
<tr><td>MS10-3</td><td>53</td><td>0</td><td>35</td><td>35</td><td>35</td><td rowspan="3">konstrukcje o cechach tensegrity klasy 2</td></tr>
<tr><td>MS10-4</td><td>75</td><td>0</td><td>23</td><td>23</td><td>23</td></tr>
<tr><td>MS10-5</td><td>72</td><td>0</td><td>26</td><td>26</td><td>26</td></tr>
</table>

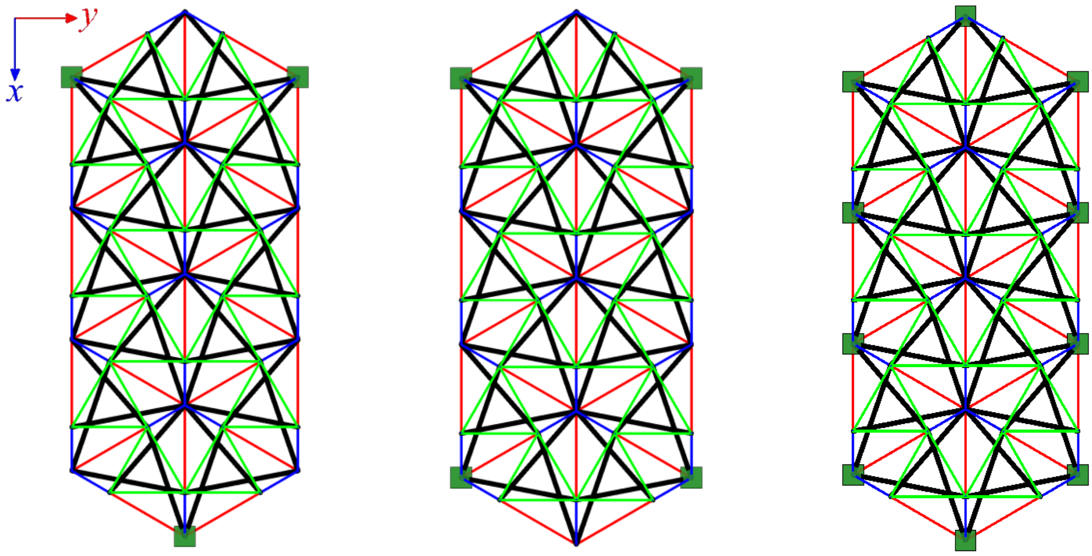
5.4.3. 14-modułowa płyta *modified Simplex*

Następną rozpatrywaną konstrukcją jest 14-modułowa płyta *modified Simplex* (rys. 5.32), która składa się z 136 elementów ($n = 136$) i 39 węzłów ($w = 39$). Rozpatrzono trzy schematy podparcia (rys. 5.33):

- ***model MS14-1*** – płyta swobodnie podparta w płaszczyźnie dolnej w trzech węzłach (9 więzów),
- ***model MS14-2*** – płyta swobodnie podparta w płaszczyźnie dolnej w czterech węzłach (12 więzów),
- ***model MS14-3*** – płyta swobodnie podparta w płaszczyźnie dolnej w dziesięciu węzłach (30 więzów).



Rys. 5.32. Geometria 14-modułowej płyty *modified Simplex*



Model MS14-1 *Model MS14-1* *Model MS14-3*

Rys. 5.33. Modele analizowanych 14-modułowych płyt *modified Simplex*

Wyniki analizy jakościowej 14-modułowych płyt *modified Simplex* przedstawiono w tabeli 5.19. Wszystkie modele charakteryzują się cechami: ***S***, ***W*** i ***C***, jednak, z uwagi na połączenia modułów w układzie węzeł-węzeł, struktury te nie spełniają cechy o nieciągłości elementów ściskanych (***N***). Modele MS14-1 i MS14-2, charakteryzujące się występowaniem mechanizmu (***M***), zaliczono do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 1, natomiast model MS14-3, ze względu na brak mechanizmu – do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 2.

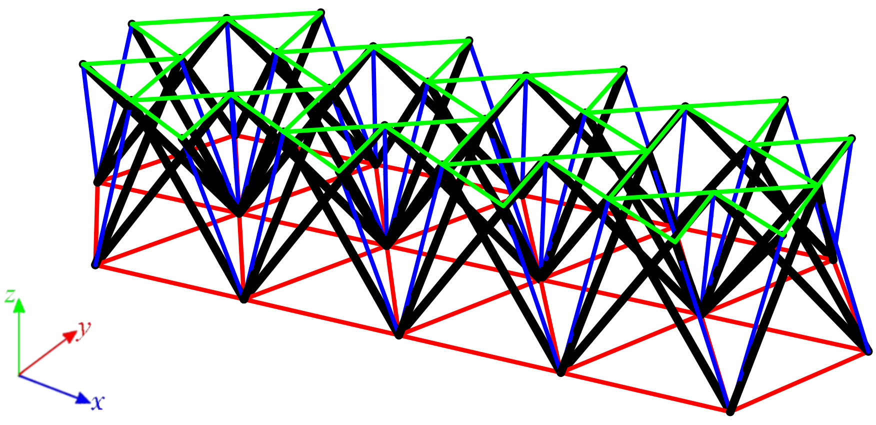
Tabela 5.19. *Rezultaty analizy jakościowej dla 14-modułowych płyt modified Simplex*

Model	Liczba węzłów (*w*)	Liczba elementów (*n*)	Liczba swobodnych stopni swobody *(m)*	Liczba mechanizmów *(lm)*	Liczba stanów samonaprężenia *(lss)*	Sprawdzenie *(n-m)*	Sprawdzenie *(lss-lm)*	Klasyfikacja
MS14-1	39	136	108	1	29	28	28	konstrukcje o cechach tensegrity klasy 1
MS14-2			105	1	32	31	31	
MS14-3			87	0	49	49	49	konstrukcje o cechach tensegrity klasy 2

5.4.4. 18-modułowa płyta *modified Simplex*

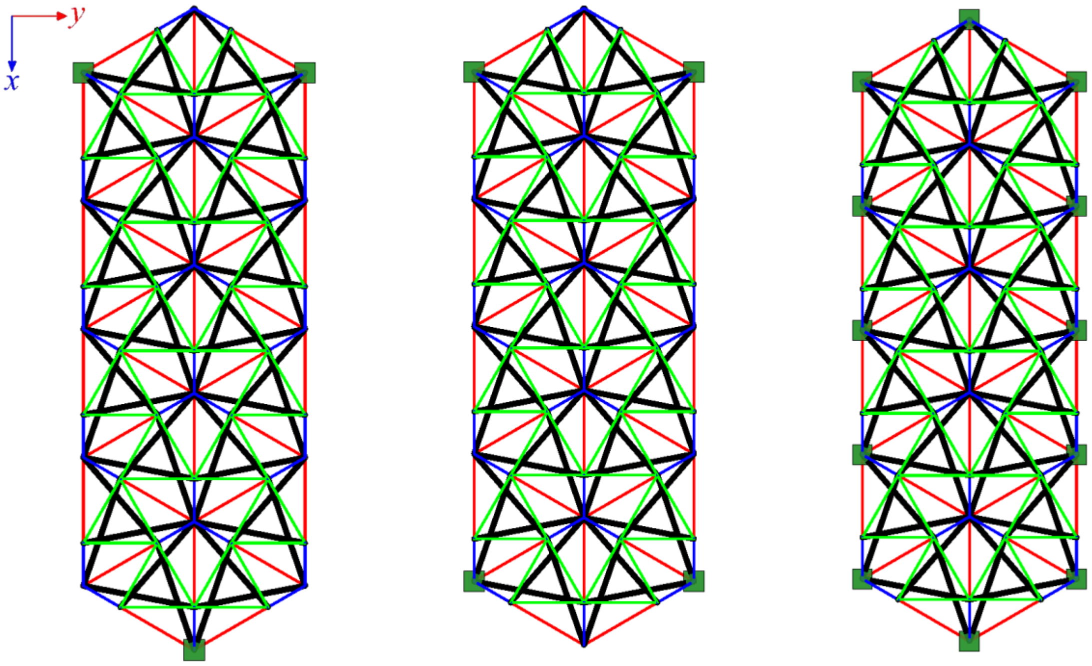
Kolejną rozważaną strukturą jest 18-modułowa płyta *modified Simplex* (rys. 5.34), która składa się z 174 elementów ($n = 174$) i 49 węzłów ($w = 49$). Rozpatrzono trzy schematy podparcia (rys. 5.35):

- ***model MS18-1*** – płyta swobodnie podparta w płaszczyźnie dolnej w trzech węzłach (9 więzów),
- ***model MS18-2*** – płyta swobodnie podparta w płaszczyźnie dolnej w czterech węzłach (12 więzów),
- ***model MS18-3*** – płyta swobodnie podparta w płaszczyźnie dolnej w dwunastu węzłach (36 więzów).



Rys. 5.34. Geometria 18-modułowej płyty *modified Simplex*

Wyniki analizy jakościowej 18-modułowych płyt *modified Simplex* przedstawiono w tabeli 5.20. Wszystkie modele charakteryzują się cechami: ***S***, ***W*** i ***C***, jednak, z uwagi na połączenia modułów w układzie węzeł-węzeł, struktury te nie spełniają cechy o nieciągłości elementów ściskanych (***N***). Modele MS18-1 i MS18-2, charakteryzujące się występowaniem mechanizmu (***M***), zaliczono do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 1, natomiast model MS18-3, z uwagi na brak mechanizmu – do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 2.



Rys. 5.35. Modele 18-modułowej płyty *modified Simplex*

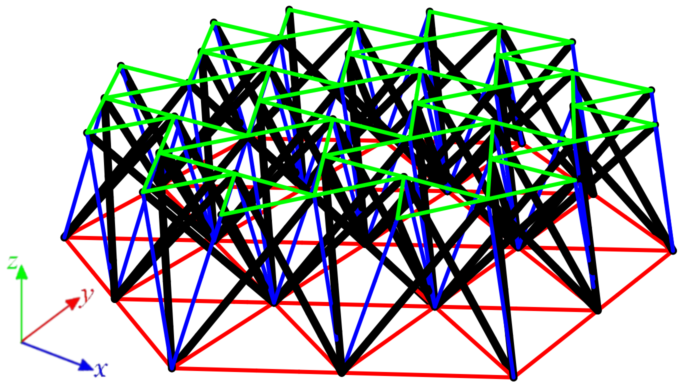
Tabela 5.20. *Rezultaty analizy jakościowej dla 18-modułowych płyt modified Simplex*

Model	Liczba węzłów (*w*)	Liczba elementów (*n*)	Liczba swobodnych stopni swobody *(m)*	Liczba mechanizmów *(lm)*	Liczba stanów samonaprężenia *(lss)*	Sprawdzenie *(n-m)*	*(lss-lm)*	Klasyfikacja
MS18-1	49	174	138	1	37	36	36	konstrukcje o cechach tensegrity klasy 1
MS18-2			174	1	40	39	39	
MS18-3			111	0	63	63	63	konstrukcje o cechach tensegrity klasy 2

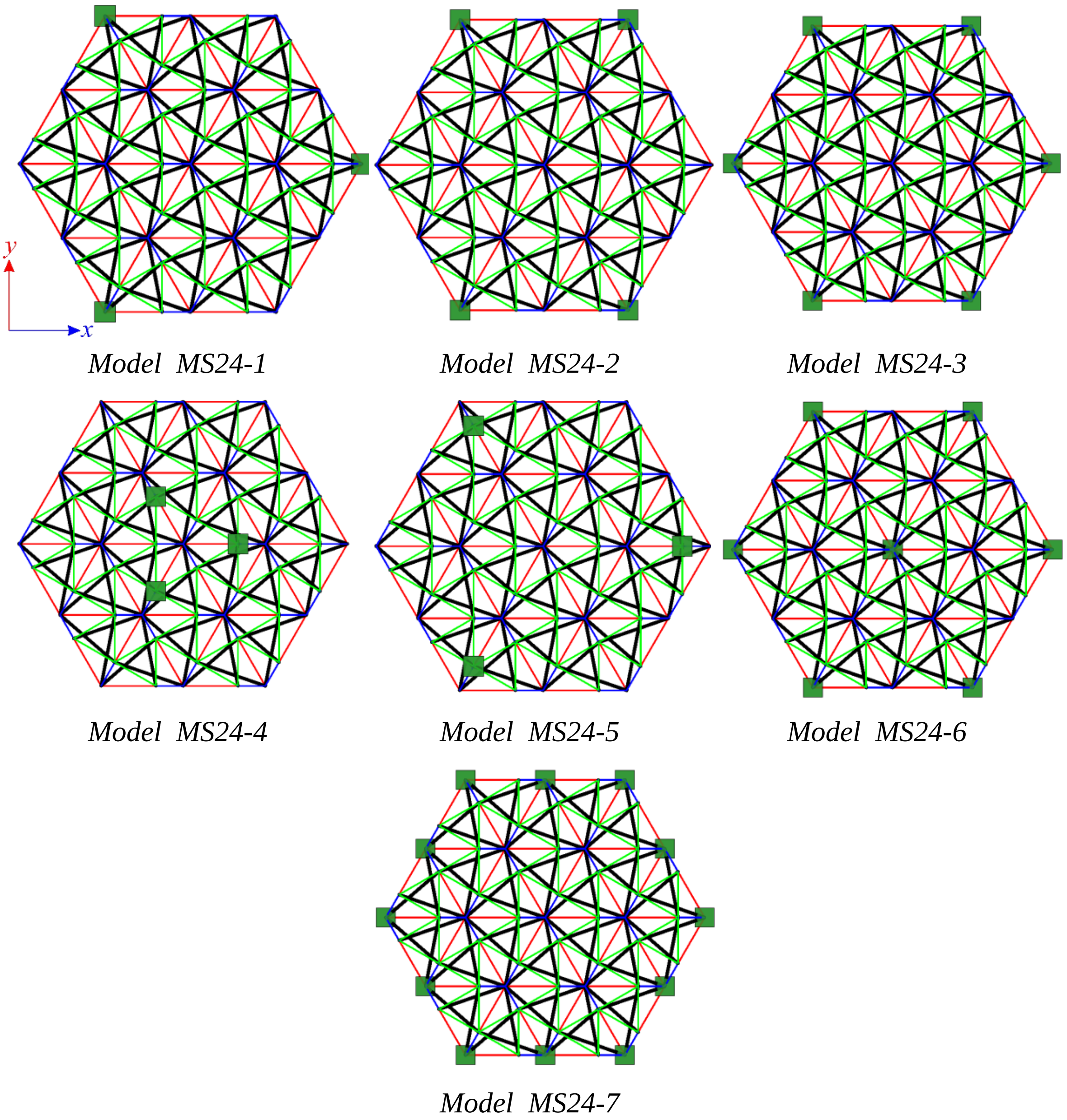
5.4.5. 24-modułowa płyta *modified Simplex*

Pierwszą rozważaną strukturą jest płyta zbudowana z dwudziestu czterech modułów *modified Simplex* (rys. 5.36), która składa się z 228 elementów ($n = 228$) i 61 węzłów ($w = 61$). Rozpatrzono następujące schematy podparcia (rys. 5.37):

– ***model MS24-1*** – płyta swobodnie podparta w płaszczyźnie dolnej w trzech węzłach (9 więzów),
– ***model MS24-2*** – płyta swobodnie podparta w płaszczyźnie dolnej w czterech węzłach (12 więzów),
– ***model MS24-3*** – płyta swobodnie podparta w płaszczyźnie dolnej w sześciu węzłach (18 więzów),
– ***model MS24-4*** – płyta swobodnie podparta w płaszczyźnie górnej w trzech węzłach (9 więzów),
– ***model MS24-5*** – płyta swobodnie podparta w płaszczyźnie górnej w trzech węzłach (9 więzów),
– ***model MS24-6*** – płyta swobodnie podparta w płaszczyźnie dolnej w siedmiu węzłach (21 więzów).



Rys. 5.36. Geometria 24-modułowej płyty *modified Simplex*



Rys. 5.37. Modele analizowanych 24-modułowych płyt *modified Simplex*

Wyniki analizy jakościowej 24-modułowych płyt *modified Simplex* przedstawiono w tabeli 5.21. Wszystkie modele charakteryzują się cechami: ***S***, ***W*** i ***C***, jednak, z uwagi na połączenia modułów w układzie węzeł-węzeł, struktury te nie spełniają cechy o nieciągłości elementów ściskanych (***N***). Modele MS24-1 – MS24-4 zaliczono do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 1, natomiast model MS24-5 – MS24-7, ze względu na brak mechanizmów (***M***) należy zakwalifikować do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 2.

Tabela 5.21. *Rezultaty analizy jakościowej dla 24-modułowych płyt modified Simplex*

<table>
<tr><th rowspan="2">Model</th><th rowspan="2">Liczba węzłów (w)</th><th rowspan="2">Liczba elementów (n)</th><th rowspan="2">Liczba swobodnych stopni swobody (m)</th><th rowspan="2">Liczba mechanizmów (lm)</th><th rowspan="2">Liczba stanów samonaprężenia (lss)</th><th colspan="2">Sprawdzenie</th><th rowspan="2">Klasyfikacja</th></tr>
<tr><th>(n-m)</th><th>(lss-lm)</th></tr>
<tr><td>MS24-1</td><td rowspan="7">61</td><td rowspan="7">228</td><td>174</td><td>1</td><td>55</td><td>54</td><td>54</td><td rowspan="4">konstrukcje o cechach tensegrity klasy 1</td></tr>
<tr><td>MS24-2</td><td>171</td><td>1</td><td>58</td><td>57</td><td>57</td></tr>
<tr><td>MS24-3</td><td>165</td><td>1</td><td>64</td><td>63</td><td>63</td></tr>
<tr><td>MS24-4</td><td>174</td><td>1</td><td>55</td><td>54</td><td>54</td></tr>
<tr><td>MS24-5</td><td>174</td><td>0</td><td>54</td><td>54</td><td>54</td><td rowspan="3">konstrukcje o cechach tensegrity klasy 2</td></tr>
<tr><td>MS24-6</td><td>162</td><td>0</td><td>66</td><td>66</td><td>66</td></tr>
<tr><td>MS24-7</td><td>147</td><td>0</td><td>81</td><td>81</td><td>81</td></tr>
</table>

5.5. Struktury zbudowane z modułu *Quartex*

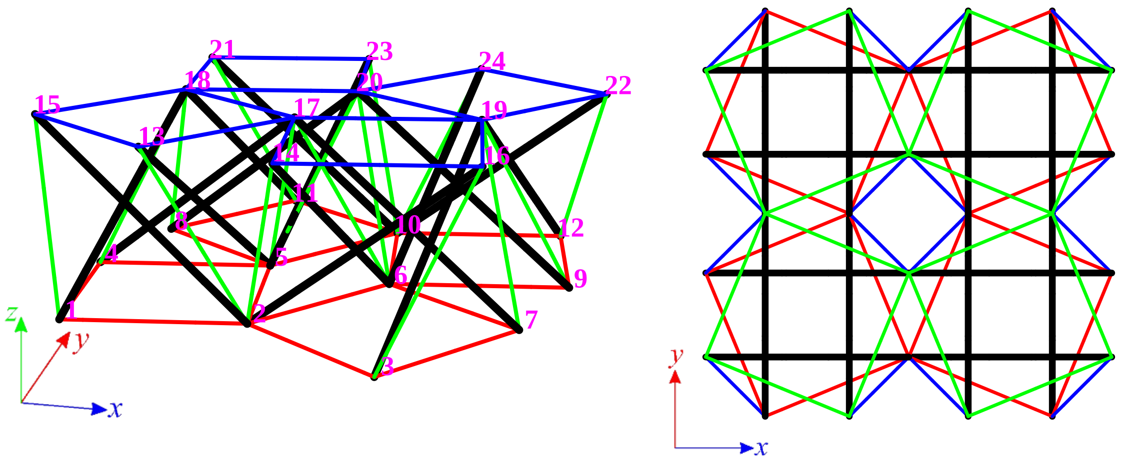
Kolejną analizowaną grupą konstrukcji są dwuwarstwowe kratownice zbudowane z modułów *Quartex*. Kolejno przeprowadzono analizę jakościową płyty 4-modułowej, płyty 16-modułowej i płyty 64-modułowej oraz pasma płytowego zbudowanego z 4 modułów.

5.5.1. 4-modułowa płyta *Quartex*

Pierwszą rozważaną konstrukcją jest płyta zbudowana z czterech modułów *Quartex* (rys. 5.38), która składa się z 64 elementów ($n = 64$) i 24 węzłów ($w = 24$). Rozpatrzono następujące schematy podparcia (rys. 5.39):

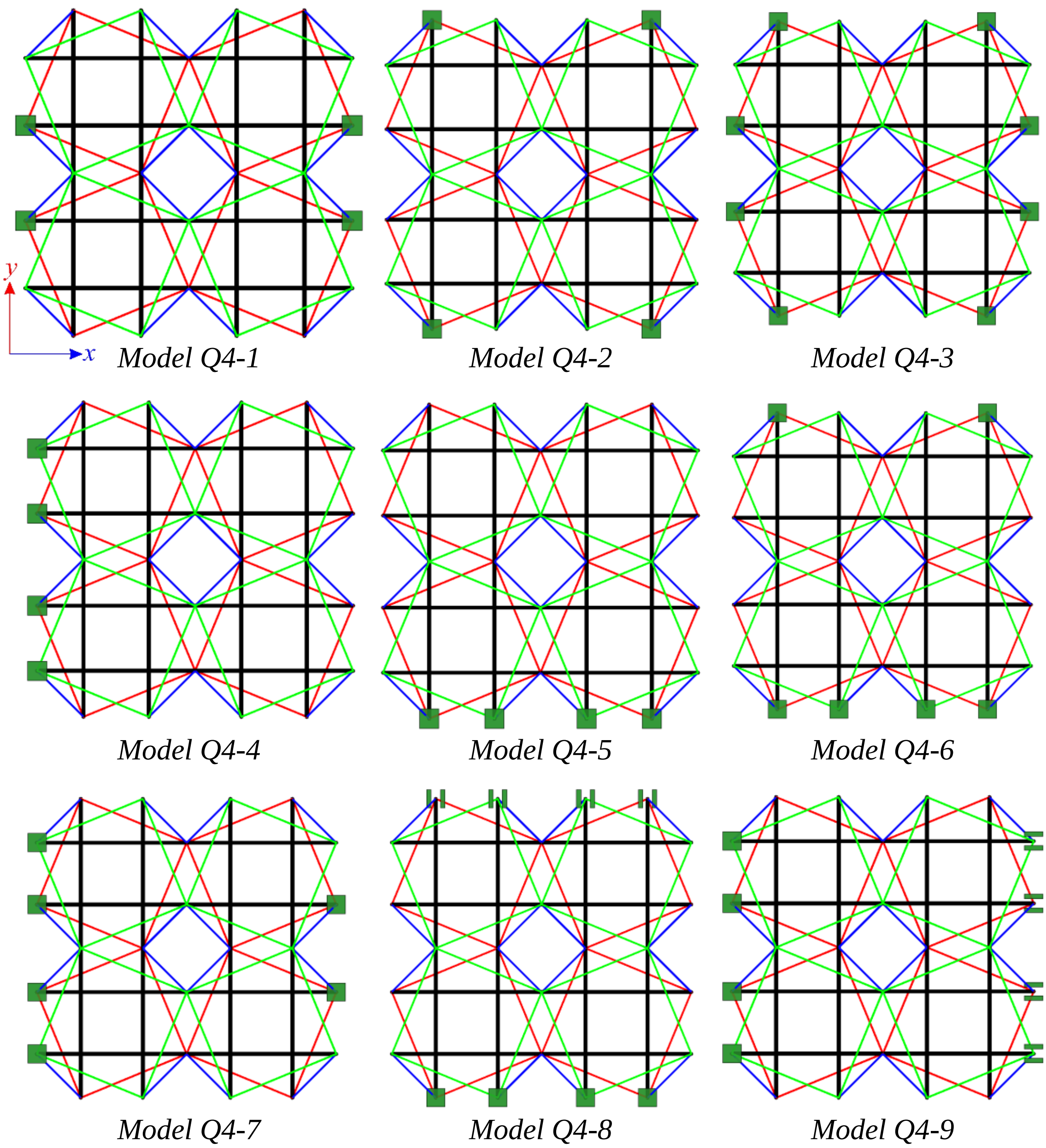
- ***model Q4-1*** – model swobodnie podparty w płaszczyźnie dolnej na dwóch przeciwległych krawędziach w kierunku *x* (12 więzów),
- ***model Q4-2*** – model swobodnie podparty w płaszczyźnie dolnej na dwóch przeciwległych krawędziach w kierunku *y* (12 więzów),
- ***model Q4-3*** – model swobodnie podparty w płaszczyźnie dolnej na czterech krawędziach (24 więzy),
- ***model Q4-4*** – model swobodnie podparty górą i dołem na jednej krawędzi (utwierdzenie) w kierunku *x* (12 więzów),
- ***model Q4-5*** – model swobodnie podparty górą i dołem na jednej krawędzi (utwierdzenie) w kierunku *y* (12 więzów),

– ***model Q4-6*** – model swobodnie podparty górą i dołem na jednej krawędzi (utwierdzenie) i dołem na krawędzi przeciwległej (swobodne podparcie) w kierunku *x* (18 więzy),
– ***model Q4-7*** – model swobodnie podparty górą i dołem na jednej krawędzi (utwierdzenie) i dołem na krawędzi przeciwległej (swobodne podparcie) w kierunku *y* (18 więzy),
– ***model Q4-8*** – model swobodnie podparty górą i dołem na dwóch przeciwległych krawędziach w kierunku *x*, ale ze zwolnieniem przesuwu na kierunku poprzecznym (utwierdzenie + utwierdzenie z możliwym przesunięciem) (20 więzów),
– ***model Q4-9*** – model swobodnie podparty górą i dołem na dwóch przeciwległych krawędziach w kierunku *x*, ale ze zwolnieniem przesuwu na kierunku poprzecznym (utwierdzenie + utwierdzenie z możliwym przesunięciem) (20 więzów).



widok w płaszczyźnie xy

Rys. 5.38. Geometria 4-modułowej płyty *modified Quartex*



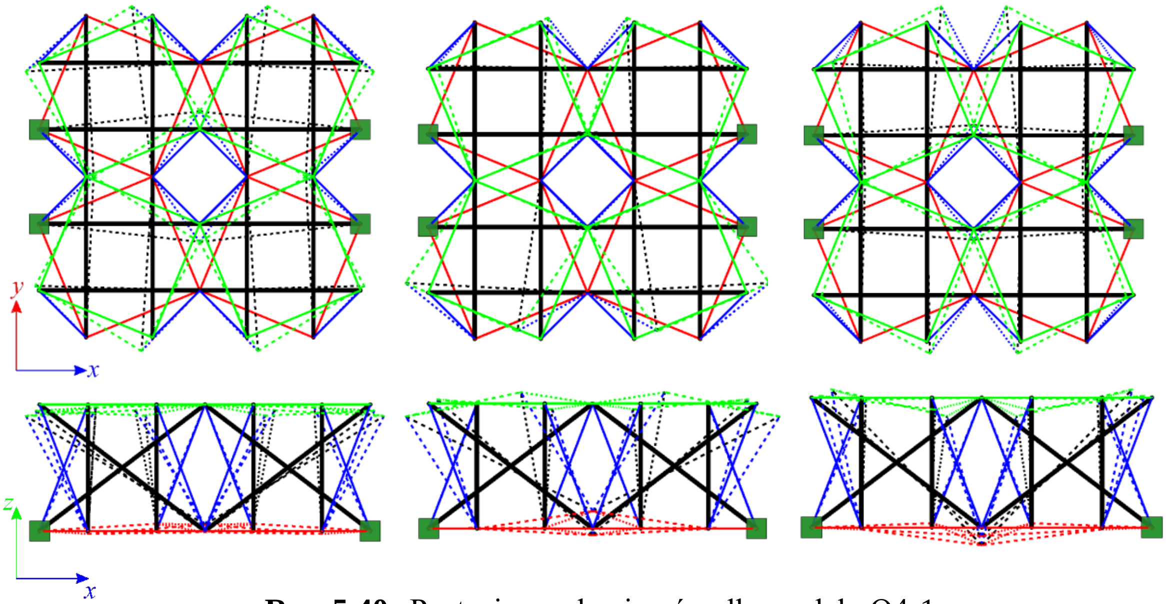
Rys. 5.39. Modele 4-modułowej płyty *Quartex*

Wyniki analizy jakościowej 4-modułowych płyt *Quartex* przedstawiono w tabeli 5.22. We wszystkich analizowanych modelach zidentyfikowane zostały stany samonaprężenia (***S***), przy czym ich liczba zależy od sposobu podparcia. Otrzymane stany samonaprężenia w różny sposób definiują elementy konstrukcji, ale uwzględnienie stanów samonaprężenia otrzymanych w przypadku pojedynczego modułu (rys. 5.7) pozwala zidentyfikować rodzaje elementów (siły od stanów samonaprężenia w elementach wspólnych były stosownie powielone). Wszystkie modele charakteryzują się cechami ***W*** i ***C***, jednak, z uwagi na połączenia modułów w układzie węzeł-węzeł, struktury te nie spełniają cechy o nieciągłości elementów ściskanych (***N***). Modele Q4-1 – Q4-7, charakteryzujące się występowaniem mechanizmu (***M***), zaliczono do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 1, natomiast modele Q4-8 – Q4-10, ze względu na brak mechanizmów, należy zakwalifikować do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 2.

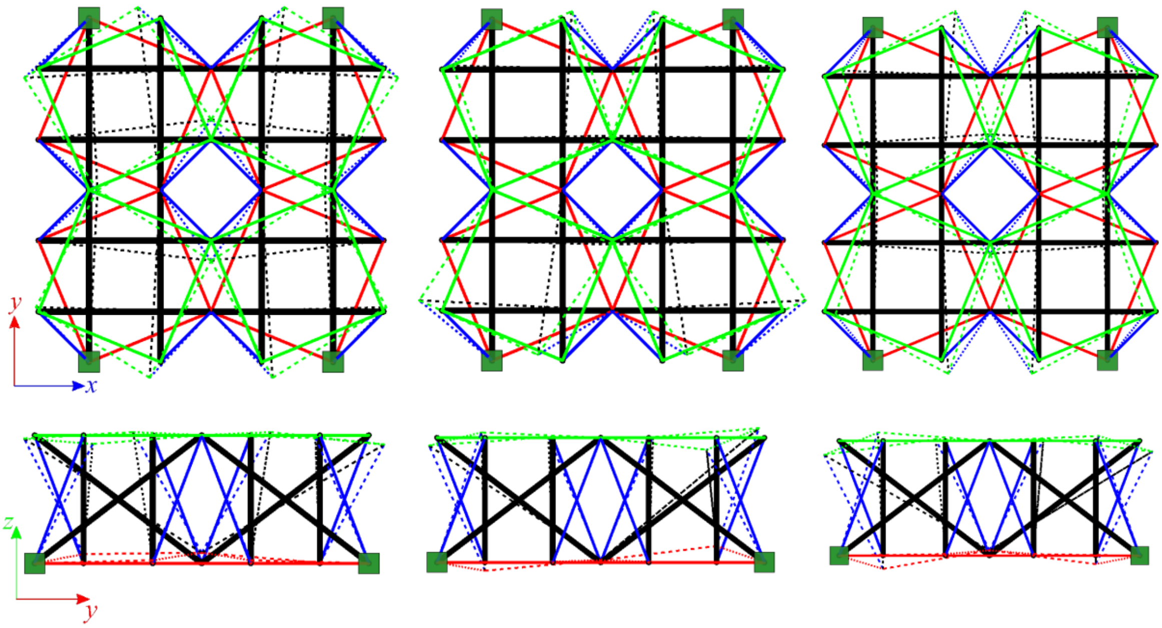
Tabela 5.22. *Rezultaty analizy jakościowej dla 4-modułowych płyt Quartex*

<table>
<tr><th rowspan="2">Model</th><th rowspan="2">Liczba węzłów (w)</th><th rowspan="2">Liczba elementów (n)</th><th rowspan="2">Liczba swobodnych stopni swobody (m)</th><th rowspan="2">Liczba mechanizmów (lm)</th><th rowspan="2">Liczba stanów samonaprężenia (lss)</th><th colspan="2">Sprawdzenie</th><th rowspan="2">Klasyfikacja</th></tr>
<tr><th>(n-m)</th><th>(lss-lm)</th></tr>
<tr><td>Q4-1,
Q4-2</td><td rowspan="6">24</td><td rowspan="6">64</td><td>60</td><td>3</td><td>7</td><td>4</td><td>4</td><td rowspan="4">konstrukcje o cechach tensegrity klasy 1</td></tr>
<tr><td>Q4-3</td><td>48</td><td>2</td><td>18</td><td>16</td><td>16</td></tr>
<tr><td>Q4-4,
Q4-5</td><td>60</td><td>2</td><td>6</td><td>4</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Q4-6</td><td>54</td><td>1</td><td>11</td><td>10</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Q4-7</td><td>54</td><td>0</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td><td rowspan="2">konstrukcje o cechach tensegrity klasy 2</td></tr>
<tr><td>Q4-8,
Q4-9</td><td>52</td><td>0</td><td>12</td><td>12</td><td>12</td></tr>
</table>

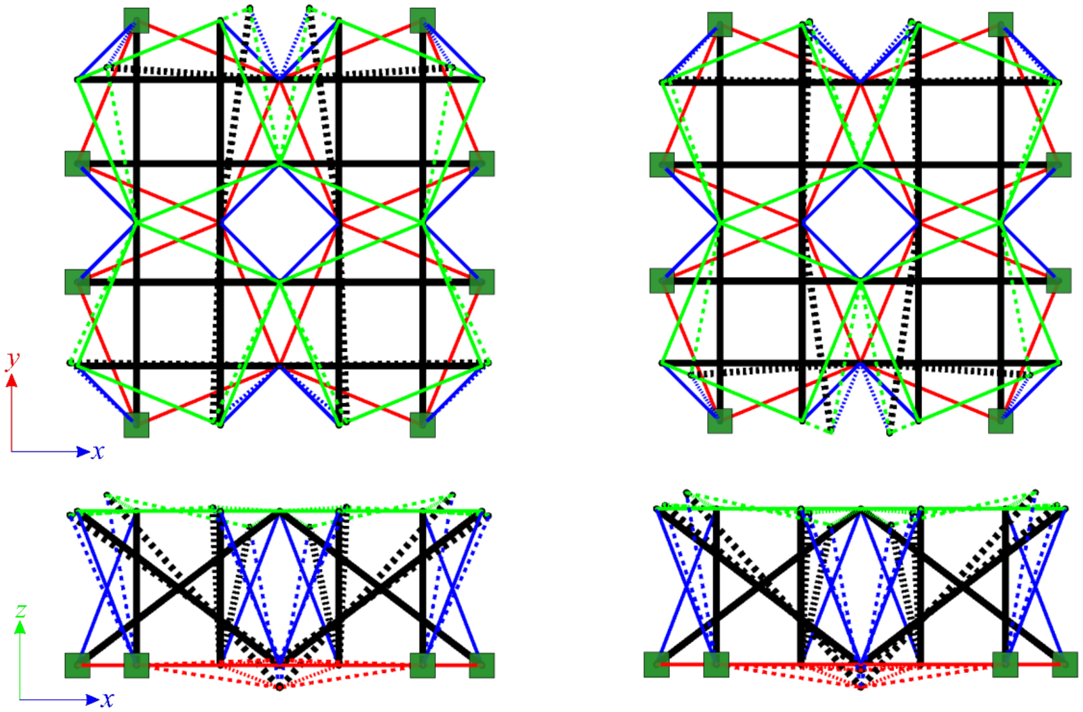
W przypadku modeli swobodnie podpartych, tj. Q4-1, Q4-2 i Q4-3, dla dwóch pierwszych uzyskano 3 mechanizmu, a dla Q4-3 – 2 mechanizmy. Mechanizmy Q4-1 i Q4-2, podpartych na dwóch krawędziach, są do siebie podobne, porównując przemieszczenia w kierunku *x*, *y*, natomiast różne na kierunku *z* (rys. 5.40 i 5.41). Obie postaci mechanizmu Q4-3, podpartego na 4 krawędziach, są symetryczne względem siebie (rys. 5.42). Postaci mechanizmów uzyskanych dla Q4-4, Q4-5 i Q4-6 są natomiast niesymetryczne (rys. 5.43-5.45).



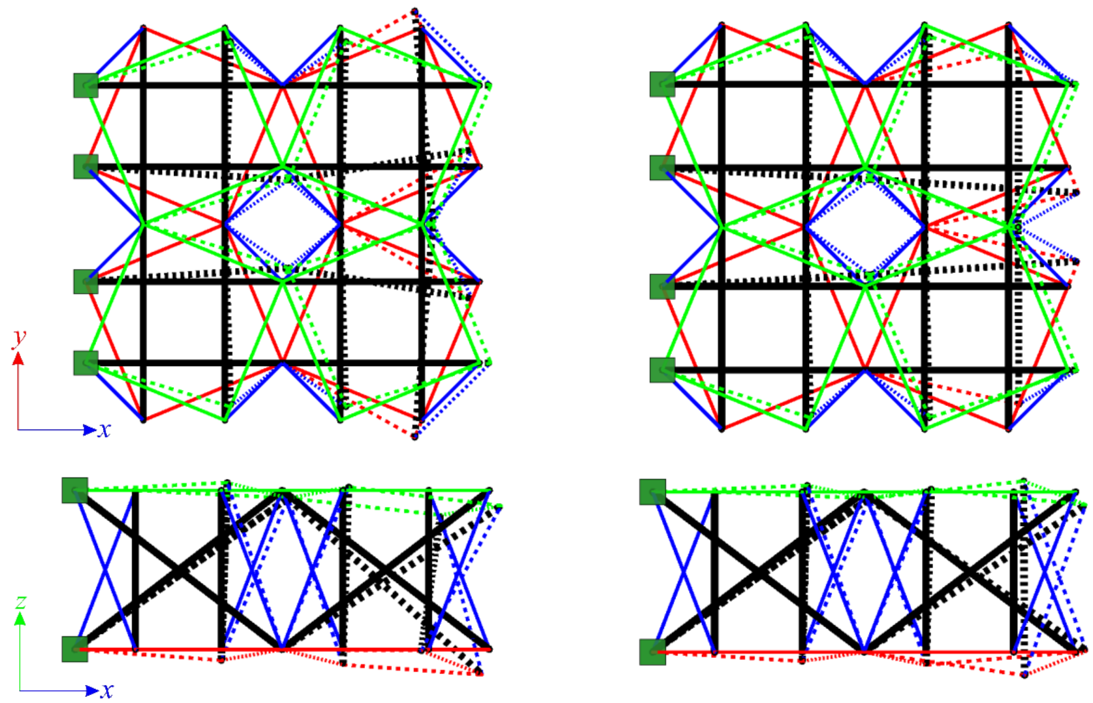
Rys. 5.40. Postacie mechanizmów dla modelu Q4-1



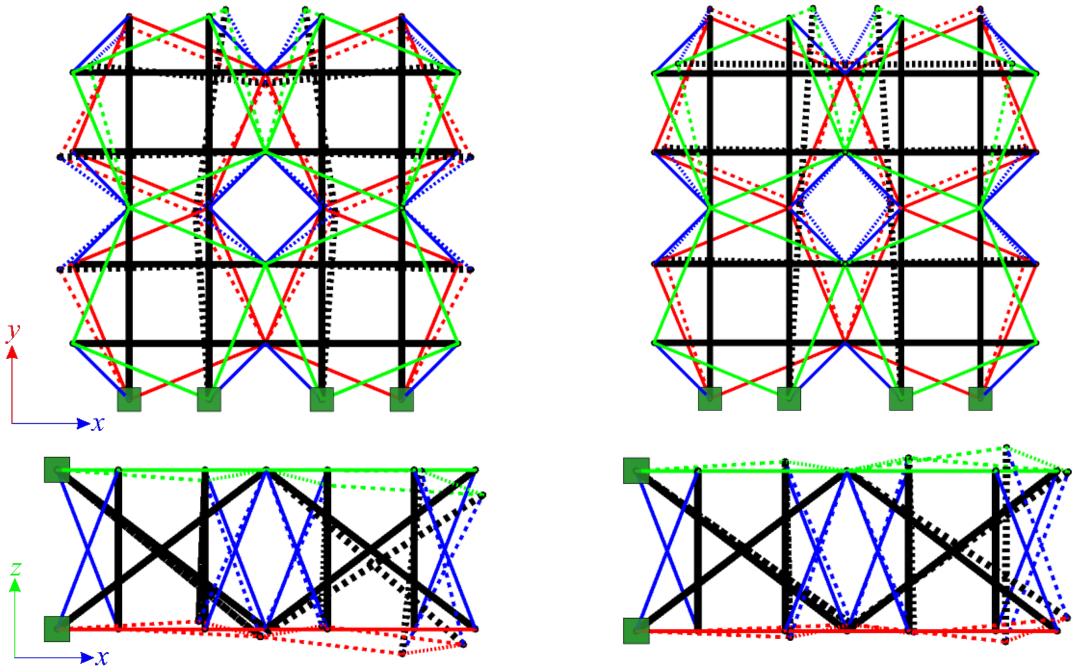
Rys. 5.41. Postacie mechanizmów dla modelu Q4-2



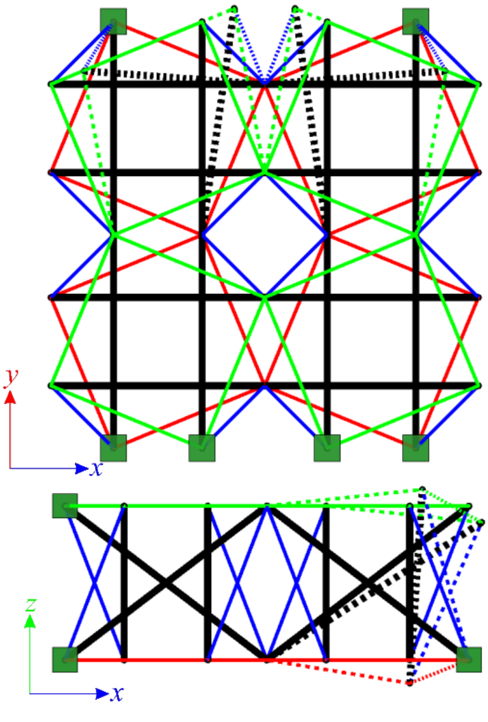
Rys. 5.42. Postacie mechanizmów dla modelu Q4-3



Rys. 5.43. Postacie mechanizmów dla modelu Q4-4



Rys. 5.44. a) postacie mechanizmów dla modelu Q4-5

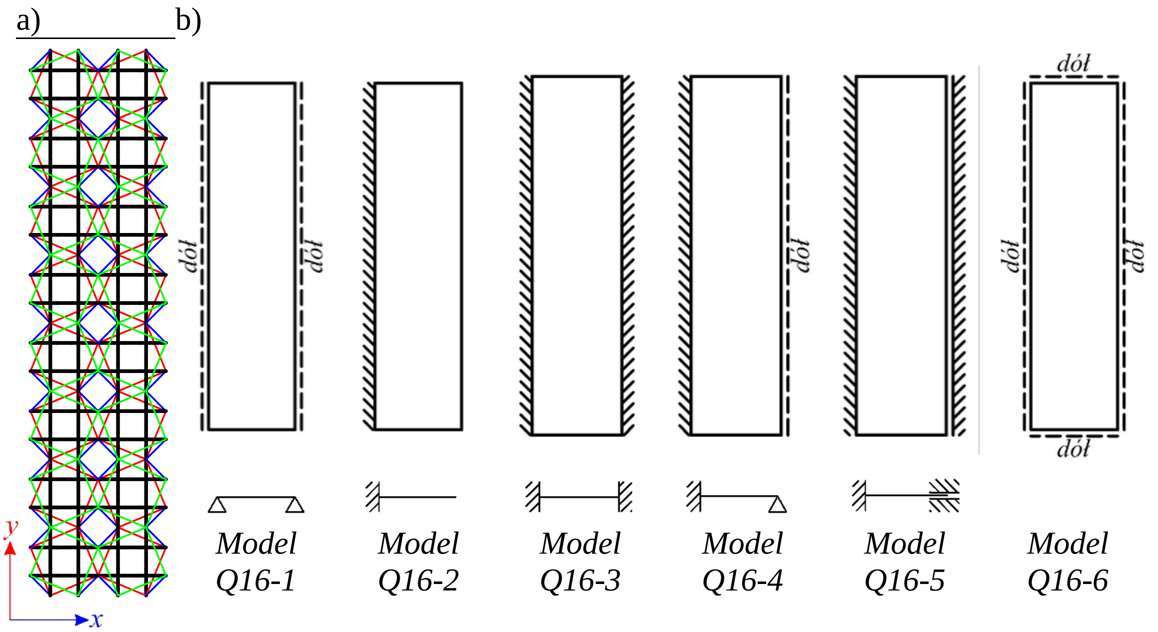


Rys. 5.45. Postacie mechanizmów dla modelu Q4-6

5.5.2. 16-modułowa płyta *Quartex*

Kolejną rozważaną strukturą jest płyta zbudowana z 16 modułów *Quartex* (rys. 5.46a), która składa się z 256 elementów (n = 256) i 84 węzłów (w = 84). Rozważono następujące schematy podparcia (rys. 5.46b):

– ***model Q16-1*** – płyta swobodnie podparta dołem na dwóch krawędziach w kierunku *y* (48 więzy),
– ***model Q16-2*** – płyta swobodnie podparta górą i dołem na jednej krawędzi (utwierdzenie) w kierunku *y* (24 więzów),
– ***model Q16-3*** – płyta swobodnie podparta górą i dołem na dwóch krawędziach (utwierdzenie) w kierunku *y* (96 więzy),
– ***model Q16-4*** – płyta swobodnie podparta górą i dołem na jednej krawędzi oraz swobodnie podparta dołem na drugiej krawędzi (utwierdzenie) w kierunku *y* (72 więzów),
– ***model Q16-5*** – płyta swobodnie podparta górą i dołem na dwóch przeciwległych krawędziach w kierunku *y*, ale ze zwolnieniem przesuwu na kierunku poprzecznym (utwierdzenie + utwierdzenie z możliwym przesunięciem) w kierunku *y* (80 więzów),
– ***model Q16-6*** – płyta swobodnie podparta w płaszczyźnie dolnej na dwóch przeciwległych krawędziach w kierunku *y* (60 więzów).



Rys. 5.46. 16-modułowa płyta *modified Quartex:* a) geometria, b) modele obliczeniowe

Wyniki analizy jakościowej 16-modułowych płyt *modified Quartex* przedstawiono w tabeli 5.23. Wszystkie modele charakteryzują się cechami: ***S***, ***W*** i ***C***, jednak, z uwagi na połączenia modułów w układzie węzeł-węzeł, struktury te nie spełniają cechy o nieciągłości elementów ściskanych (***N***). Modele Q16-1 oraz Q16-6, charakteryzujące się występowaniem mechanizmu (***M***), zaliczono do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 1. Modele Q16-3 – Q16-5, ze względu na brak mechanizmów, należy zakwalifikować do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 2. Model Q16-2, dla którego zidentyfikowano jeden nieustabilizowany mechanizm, nie jest konstrukcją tensegrity.

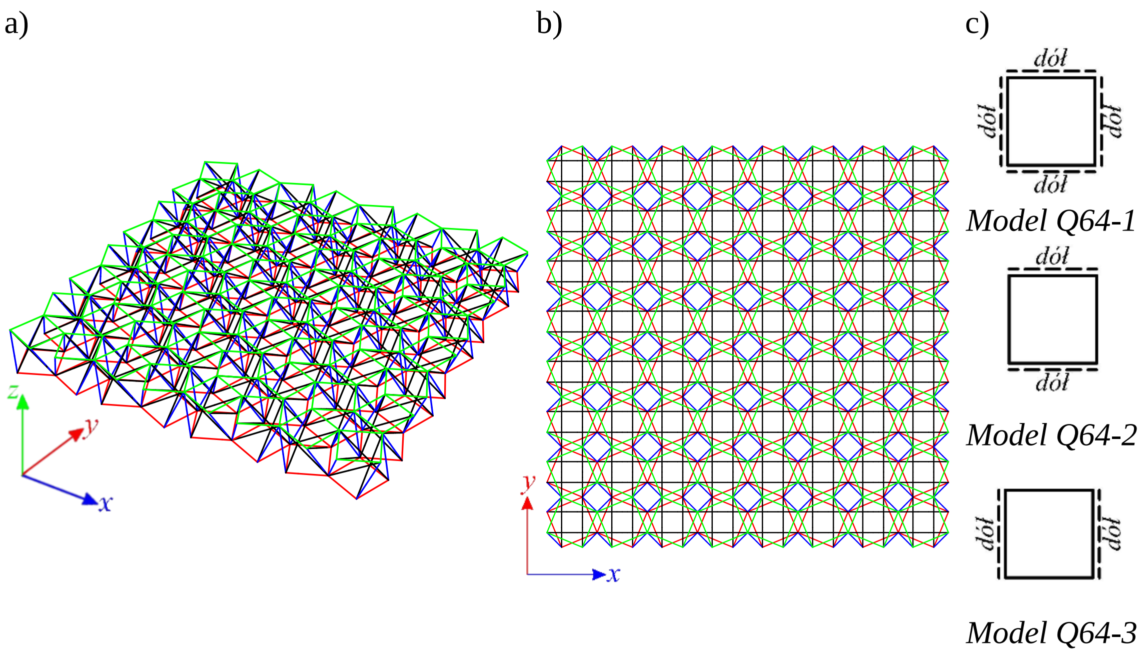
Tabela 5.23. *Rezultaty analizy jakościowej dla 16-modułowych płyt Quartex*

Model	**Liczba węzłów (*w*)**	**Liczba elementów (*n*)**	**Liczba swobodnych stopni swobody *(m)***	**Liczba mechanizmów *(lm)***	**Liczba stanów samonaprężenia *(lss)***	**Sprawdzenie *(n-m)***	***(lss-lm)***	**Klasyfikacja**
Q16-1	84	256	204	3	55	52	52	konstrukcje o cechach tensegrity klasy 1
Q16-2			228	4 (1 nie jest infinitezymalny)	32	28	28	nie tensegrity
Q16-3			156	0	100	100	100	konstrukcje o cechach tensegrity klasy 2
Q16-4			180	0	76	76	76	
Q4-5			172	0	84	84	84	
Q4-6			192	2	66	64	64	konstrukcje o cechach tensegrity klasy 1

5.5.3. 64-modułowa płyta *Quartex*

W następnym kroku rozważono płytę zbudowaną z sześćdziesięciu czterech modułów *Quartex* (rys. 5.47a, 5.47b). Struktura składa się z 1024 elementów (n = 1024) i 288 węzłów (w = 288) Rozpatrzono następujące schematy podparcia (rys. 5.47c):

- ***model Q64-1*** – płyta swobodnie podparta w płaszczyźnie dolnej na czterech krawędziach (96 więzy),
- ***model Q64-2*** – płyta swobodnie podparta w płaszczyźnie dolnej na dwóch przeciwległych krawędziach w kierunku *x* (48 więzy),
- ***model Q64-3*** – płyta swobodnie podparta w płaszczyźnie dolnej na dwóch przeciwległych krawędziach w kierunku *y (*48 więzy).



Rys. 5.47. Płyta 64-modułowa *Quartex*: a) widok 3D, b) widok w płaszczyźnie *xy*, c) modele obliczeniowe

Wyniki analizy jakościowej 64-modułowych płyt *Quartex* przedstawiono w tabeli 5.24. Wszystkie modele charakteryzują się cechami: ***S***, ***W*** i ***C***, jednak, z uwagi na połączenia modułów w układzie węzeł-węzeł, struktury te nie spełniają cechy o nieciągłości elementów ściskanych (***N***). Modele Q64-2 oraz Q64-2, charakteryzujące się występowaniem mechanizmu (***M***), zaliczono do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 1. Model Q16-1, ze względu na brak mechanizmów, należy zakwalifikować do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 2.

Tabela 5.24. *Rezultaty analizy jakościowej dla 64-modułowych płyt Quartex*

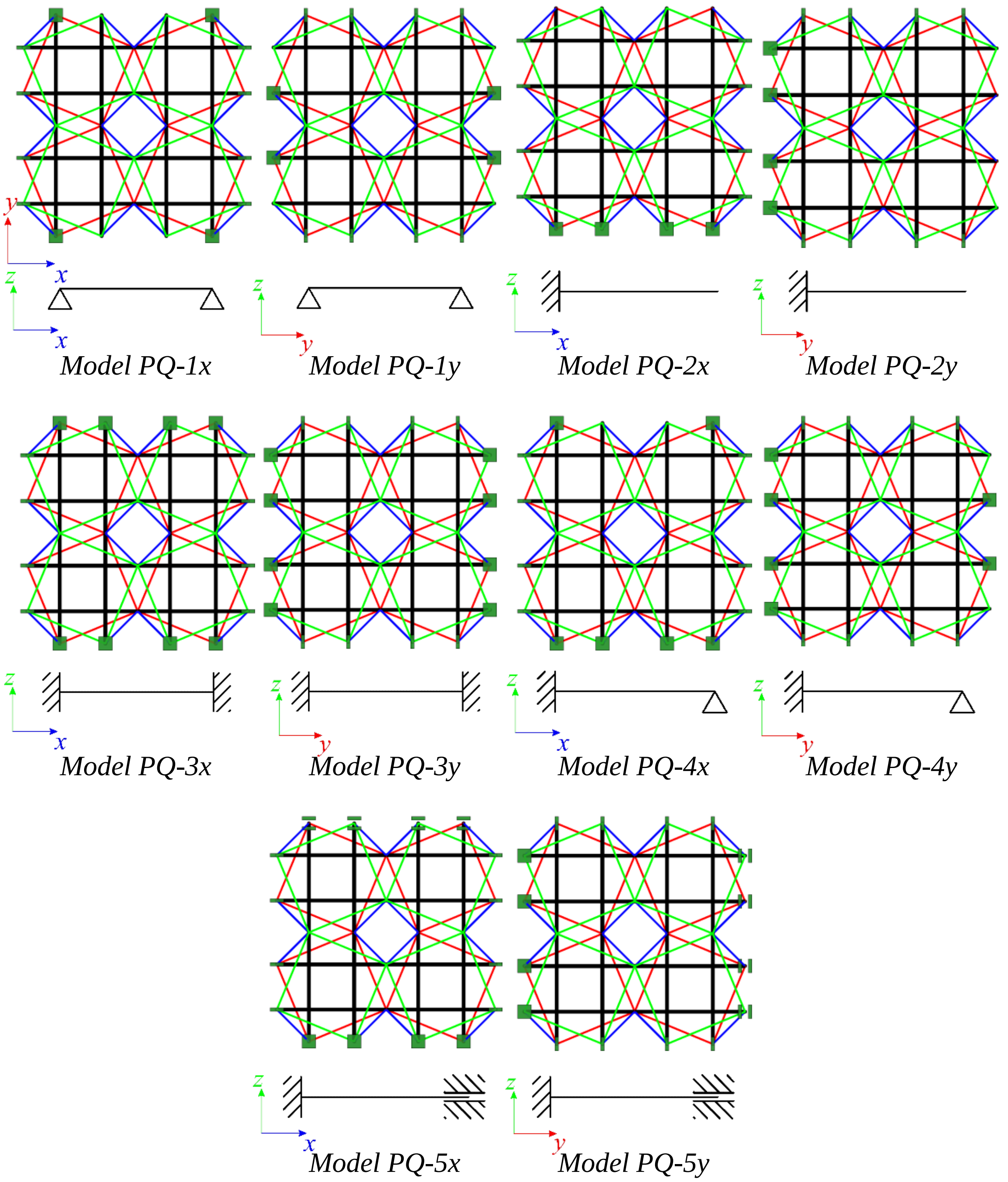
Model	Liczba węzłów (*w*)	Liczba elementów (*n*)	Liczba swobodnych stopni swobody (*m*)	Liczba mechanizmów (*lm*)	Liczba stanów samonaprężenia (*lss*)	Sprawdzenie		Klasyfikacja
						(*n-m*)	(*lss-lm*)	
Q64-1	288	1024	768	0	256	256	256	konstrukcje o cechach tensegrity klasy 2
Q64-2, Q64-3			579	1	209	208	208	konstrukcje o cechach tensegrity klasy 1

5.5.4. Pasmo płytowe *Quartex*

Następną rozważaną strukturą jest pasmo płytowe struktury zbudowanej z modułów *modified Quartex*. Zamodelowano płytę zbudowaną z czterech modułów *modified*

Quartex, dla której, w zależności od rozważanego schematu statycznego, blokowano możliwość przesuwu na kierunku *x* (gdy podpory umieszczono wzdłuż osi *x*) lub *y* (gdy podpory umieszczono wzdłuż osi *y*). Rozpatrzono następujące modele (rys. 5.48):

- ***model PQ-1x*** – pasmo płytowe swobodnie podparte w płaszczyźnie dolnej na dwóch przeciwległych krawędziach w kierunku *y* (20 więzów),
- ***model PQ-1y*** – pasmo płytowe swobodnie podparte w płaszczyźnie dolnej na dwóch przeciwległych krawędziach w kierunku *x* (20 więzów),
- ***model PQ-2x*** – pasmo płytowe swobodnie podparte górą i dołem na jednej krawędziach (sztywne zamocowanie) w kierunku *y* (20 więzów),
- ***model PQ-2y*** – pasmo płytowe swobodnie podparte górą i dołem na jednej krawędziach (sztywne zamocowanie) w kierunku *x* (20 więzów),
- ***model PQ-3x*** – pasmo płytowe swobodnie podparte górą i dołem na obu krawędziach (sztywne zamocowanie) w kierunku *y* (32 więzy),
- ***model PQ-3y*** – pasmo płytowe swobodnie podparte górą i dołem na obu krawędziach (sztywne zamocowanie) w kierunku *x* (32 więzy),
- ***model PQ-4x*** – pasmo płytowe swobodnie podparte górą i dołem na jednej krawędziach (sztywne zamocowanie) i dołem na krawędzi przeciwległej (swobodne podparcie) w kierunku *y* (26 więzów),
- ***model PQ-4y*** – pasmo płytowe swobodnie podparte górą i dołem na jednej krawędziach (sztywne zamocowanie) i dołem na krawędzi przeciwległej (swobodne podparcie) w kierunku *x* (26 więzów),
- ***model PQ-5x*** – pasmo płytowe swobodnie podparte górą i dołem na dwóch przeciwległych krawędziach w kierunku *y*, ale ze zwolnieniem przesuwu na kierunku poprzecznym (sztywne zamocowanie + łyżwa) (28 więzów),
- ***model PQ-5y*** – pasmo płytowe swobodnie podparte górą i dołem na dwóch przeciwległych krawędziach w kierunku *x*, ale ze zwolnieniem przesuwu na kierunku poprzecznym (sztywne zamocowanie + łyżwa) (28 więzów).



Rys. 5.48. Modele analizowanych pasm płytowych zbudowanych ze modułów *modified Quartex*

Wyniki analizy jakościowej pasm płytowych *Quartex* przedstawiono w tabeli 5.25. Wszystkie modele charakteryzują się cechami: ***S***, ***W*** i ***C***, jednak, z uwagi na połączenia modułów w układzie węzeł-węzeł, struktury te nie spełniają cechy o nieciągłości elementów ściskanych (***N***). Modele PQ-1, charakteryzujące się występowaniem mechanizmu (***M***), zaliczono do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 1, natomiast modele PQ4-2 – PQ4-5, ze względu na brak mechanizmów, należy zakwalifikować do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 2. Porównując otrzymane rezultaty z wynikami otrzymanymi dla korespondujących modeli 16-modułowych płyt *Quartex,* można stwierdzić, że nie została zachowana liczba zidentyfikowanych mechanizmów. Dla korespondujących modeli swobodnie podpartych, tj. modelu Q16-1 zidentyfikowano 3 mechanizmy, natomiast dla modelu PQ-1y zidentyfikowano jeden mechanizm. Dla modeli wspornikowych w przypadku płyty, tj. Q16-2 uzyskano cztery mechanizmy, w tym jeden nieustabilizowany, a dla modelu pasma – czyli PQ4-2y uzyskano jeden mechanizm infinitezymalny. W przypadku pozostałych płyt i pasm nie zidentyfikowano mechanizmów.

Tabela 5.25. *Rezultaty analizy jakościowej dla pasm płytowych Quartex*

Liczba modułów	**Model**	**Liczba węzłów (*w*)**	**Liczba elementów (*n*)**	**Liczba swobodnych stopni swobody *(m)***	**Liczba mechanizmów *(lm)***	**Liczba stanów samonaprężenia *(lss)***	**Sprawdzenie**		**Klasyfikacja**
							(n-m)	***(n-m)***	
4	PQ-1x, PQ-1y	24	64	52	1	13	12	12	konstrukcje o cechach tensegrity klasy 1
	PQ-2x, PQ-2y			52	0	12	12	12	konstrukcje o cechach tensegrity klasy 2
	PQ-3x, PQ-3y			40	0	24	24	24	
	PQ-4x, PQ-4y			46	0	18	18	18	
	PQ-5x, PQ-5y			44	0	20	20	20	

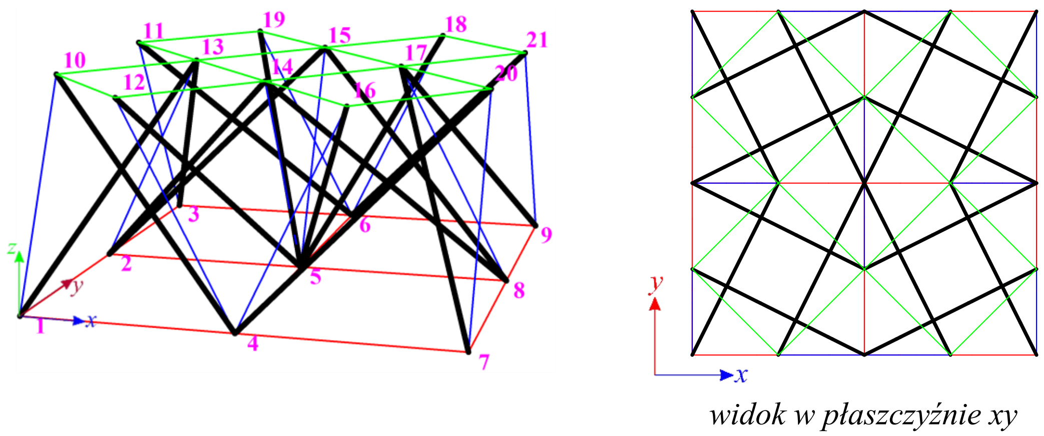
5.6. Struktury zbudowane z modułu *modified Quartex*

Kolejną analizowaną grupą konstrukcji są dwuwarstwowe kratownice zbudowane z modułów *modified Quartex*. Kolejno przeprowadzono analizę jakościową płyty 4-modułowej, płyty 16-modułowej i płyty 64-modułowej oraz pasma płytowego zbudowanego z 4 modułów.

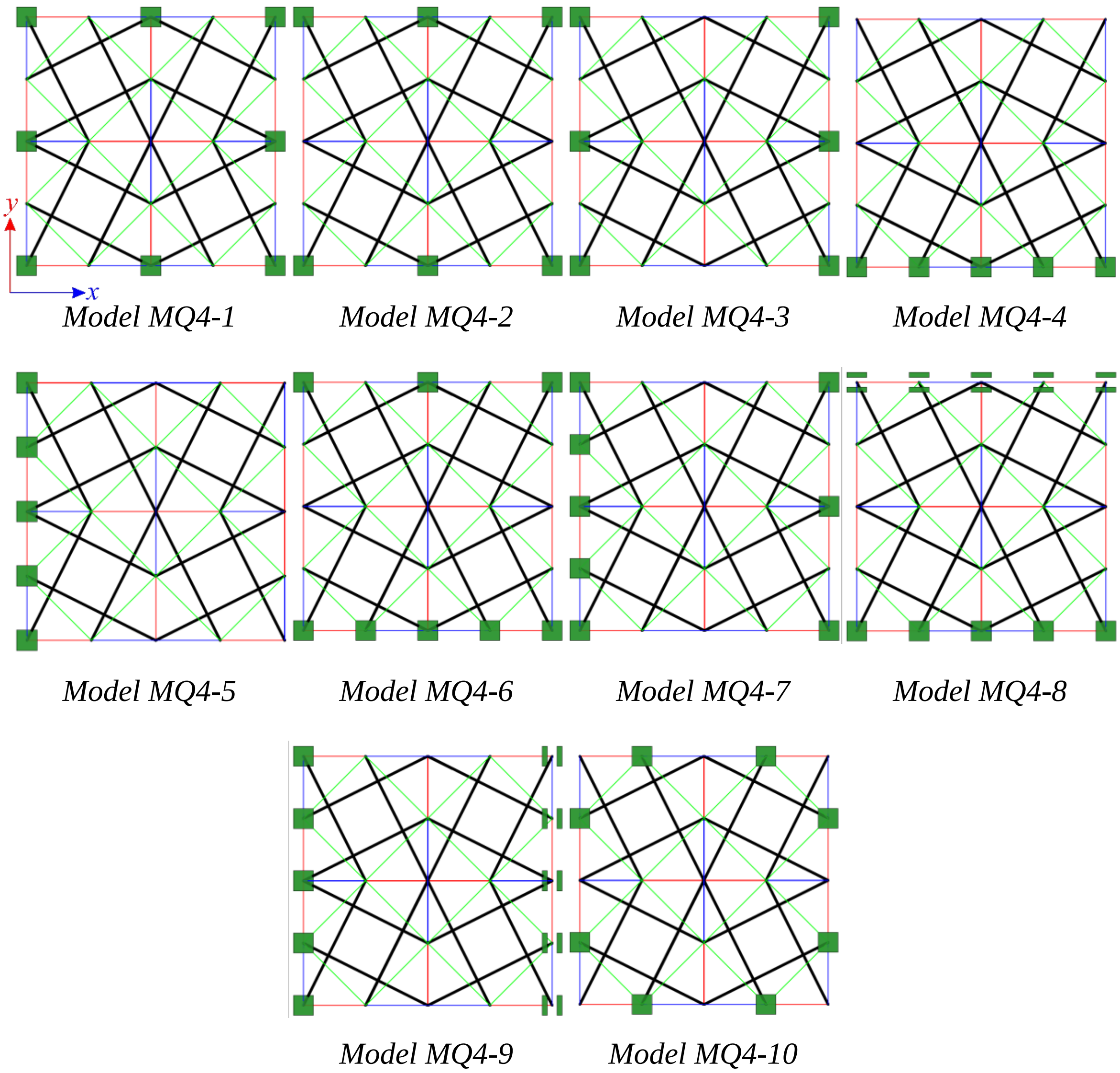
5.6.1. 4-modułowa płyta *modified Quartex*

Pierwszą rozważaną strukturą jest płyta zbudowana z czterech modułów *modified Quartex* (rys. 5.49), która składa się z 56 elementów ($n = 56$) i 21 węzłów ($w = 21$). Rozpatrzono następujące schematy podparcia (rys. 5.50):

- ***model MQ4-1*** – model swobodnie podparty w płaszczyźnie dolnej na czterech krawędziach (24 więzy),
- ***model MQ4-2*** – model swobodnie podparty w płaszczyźnie dolnej na dwóch przeciwległych krawędziach w kierunku *x* (18 więzów),
- ***model MQ4-3*** – model swobodnie podparty w płaszczyźnie dolnej na dwóch przeciwległych krawędziach w kierunku *y* (18 więzów),
- ***model MQ4-4*** – model swobodnie podparty górą i dołem na jednej krawędzi(utwierdzenie) w kierunku *x* (15 więzów),
- ***model MQ4-5*** – model swobodnie podparty górą i dołem na jednej krawędzi (utwierdzenie) w kierunku *y* (15 więzów),
- ***model MQ4-6*** – model swobodnie podparty górą i dołem na jednej krawędzi (utwierdzenie) i dołem na krawędzi przeciwległej (swobodne podparcie) w kierunku *x* (24 więzy),
- ***model MQ4-7*** – model swobodnie podparty górą i dołem na jednej krawędzi (utwierdzenie) i dołem na krawędzi przeciwległej (swobodne podparcie) w kierunku *y* (24 więzy),
- ***model MQ4-8*** – model swobodnie podparty górą i dołem na dwóch przeciwległych krawędziach w kierunku *x*, ale ze zwolnieniem przesuwu na kierunku poprzecznym (utwierdzenie + utwierdzenie z możliwym przesunięciem) (25 więzów),
- ***model MQ4-9*** – model swobodnie podparty górą i dołem na dwóch przeciwległych krawędziach w kierunku *x*, ale ze zwolnieniem przesuwu na kierunku poprzecznym (utwierdzenie + utwierdzenie z możliwym przesunięciem) (25 więzów),
- ***model MQ4-10*** – model swobodnie podparty w płaszczyźnie górnej na czterech krawędziach (24 więzy).



Rys. 5.49. Geometria 4-modułowej płyty *modified Quartex*



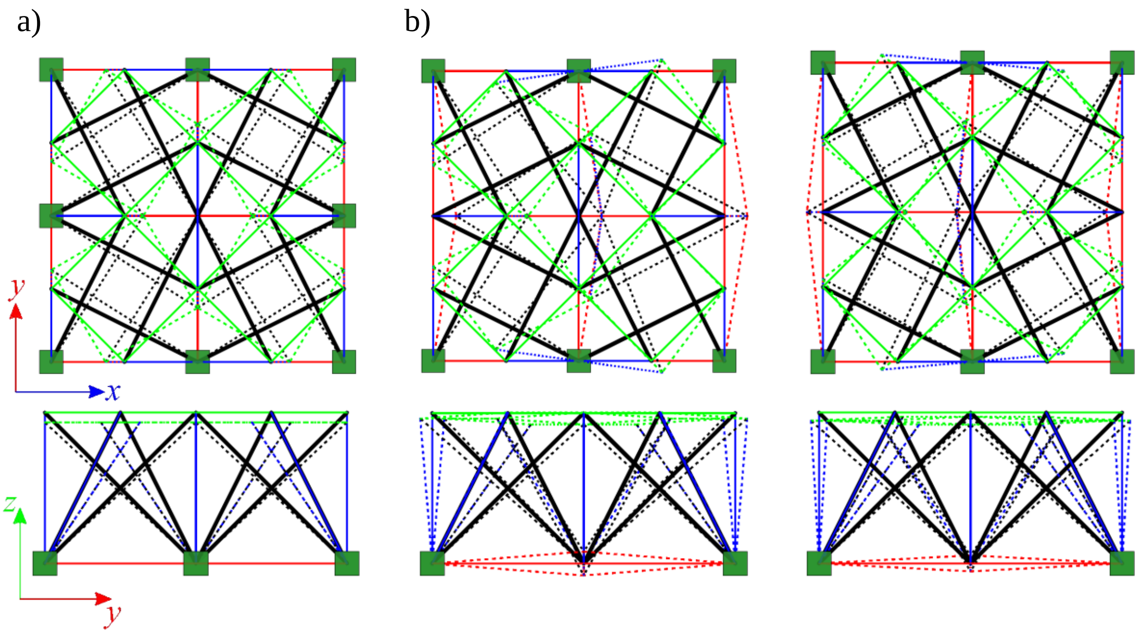
Rys. 5.50. Modele 4-modułowej płyty *modified Quartex*

Wyniki analizy jakościowej 4-modułowych płyt *modified Quartex* przedstawiono w tabeli 5.26. We wszystkich analizowanych modelach zidentyfikowane zostały stany samonaprężenia (***S***), przy czym ich liczba zależy od sposobu podparcia. Otrzymane stany samonaprężenia w różny sposób definiują elementy konstrukcji, ale uwzględnienie stanów samonaprężenia otrzymanych w przypadku pojedynczego modułu (Rys. 5.10) pozwala zidentyfikować rodzaje elementów (siły od stanów samonaprężenia w elementach wspólnych były stosownie powielone). Wszystkie modele charakteryzują się cechami ***W*** i ***C***, jednak, z uwagi na połączenia modułów w układzie węzeł-węzeł, struktury te nie spełniają cechy o nieciągłości elementów ściskanych (***N***). Modele MQ4-1 – MQ4-5, charakteryzujące się występowaniem mechanizmu (***M***), zaliczono do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 1, natomiast modele MQ4-6 – MQ4-10, ze względu na brak mechanizmów, należy zakwalifikować do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 2.

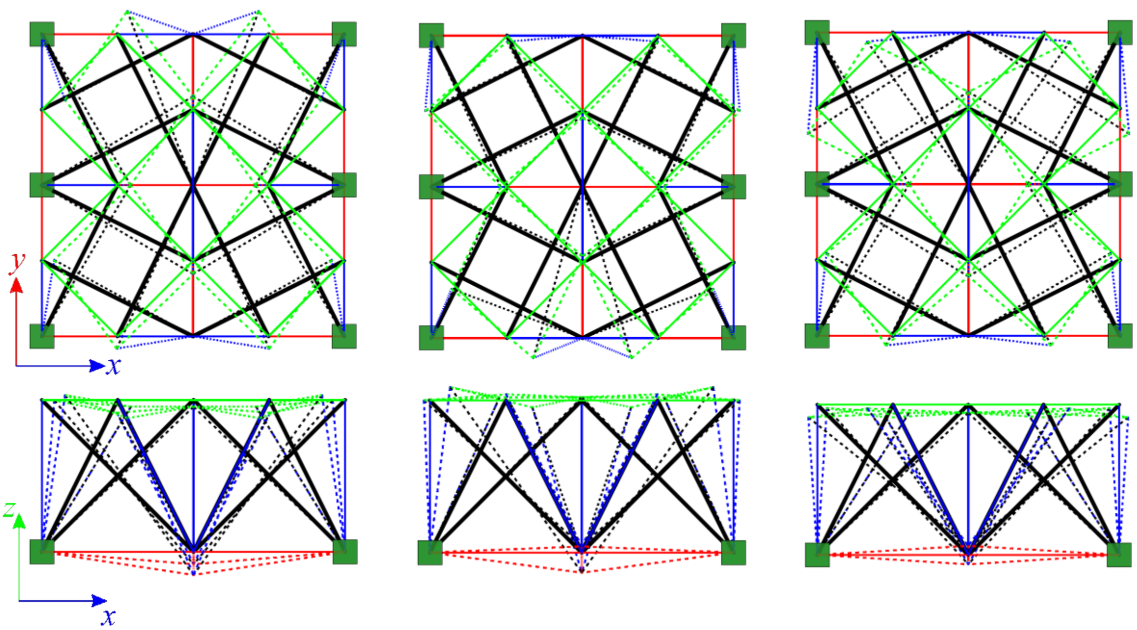
Tabela 5.26. *Rezultaty analizy jakościowej dla 4-modułowych płyt modified Quartex*

Model	**Liczba węzłów (*w*)**	**Liczba elementów (*n*)**	**Liczba swobodnych stopni swobody *(m)***	**Liczba mechanizmów *(lm)***	**Liczba stanów samonaprężenia *(lss)***	**Sprawdzenie *(n-m)***	**Sprawdzenie *(lss-lm)***	**Klasyfikacja**
MQ4-1	21	56	39	1	18	17	17	konstrukcje o cechach tensegrity klasy 1
MQ4-2			45	2	13	11	11	
MQ4-3			45	3	14	11	11	
MQ4-4, MQ4-5			48	2	10	8	8	
MQ4-6, MQ4-7			39	0	17	17	17	konstrukcje o cechach tensegrity klasy 2
MQ4-8, MQ4-9			38	0	18	18	18	
MQ4-10			39	0	17	17	17	

Mechanizm w przypadku płyt czteromodułowych podpartych swobodnie realizowany jest poprzez górne węzły konstrukcji, podobnie jak w przypadku pojedynczego modułu *modified Quartex*. Modele MQ4-1 – MQ4-3 podparte są w dolnej płaszczyźnie i dla każdego z tych modeli zidentyfikowano przynajmniej jeden mechanizm infinitezymalny. Zablokowanie przemieszczeń górnych węzłów skutkuje brakiem mechanizmu, co widać na przykładzie modelu MQ4-10. Dla modelu MQ4-1 zidentyfikowano jeden mechanizm infinitezymalny (rys. 5.51a). Jest on realizowany przez górne węzły, a deformacja poszczególnych modułów przypomina postać deformacji uzyskaną dla pojedynczego modułu *modified Quartex*. W przypadku modeli MQ4-2 oraz MQ4-3 mechanizm realizowany jest przez górne i dolne węzły konstrukcji. Dla modelu MQ4-2 zidentyfikowano dwa mechanizmy infinitezymalne (rys. 5.51b). W obu postaciach mechanizmu modelu MQ4-2 niepodparte dolne węzły konstrukcji przemieszczają się wzdłuż kierunku x i z. Dla modelu MQ4-3 zidentyfikowano trzy mechanizmy infinitezymalne (rys. 5.52). We wszystkich postaciach mechanizmu modelu MQ4-3 niepodparte dolne węzły konstrukcji przemieszczają się jedynie wzdłuż kierunku z tak, że obrys dolnej płaszczyzny płyty pozostaje niezmieniony podczas deformacji.

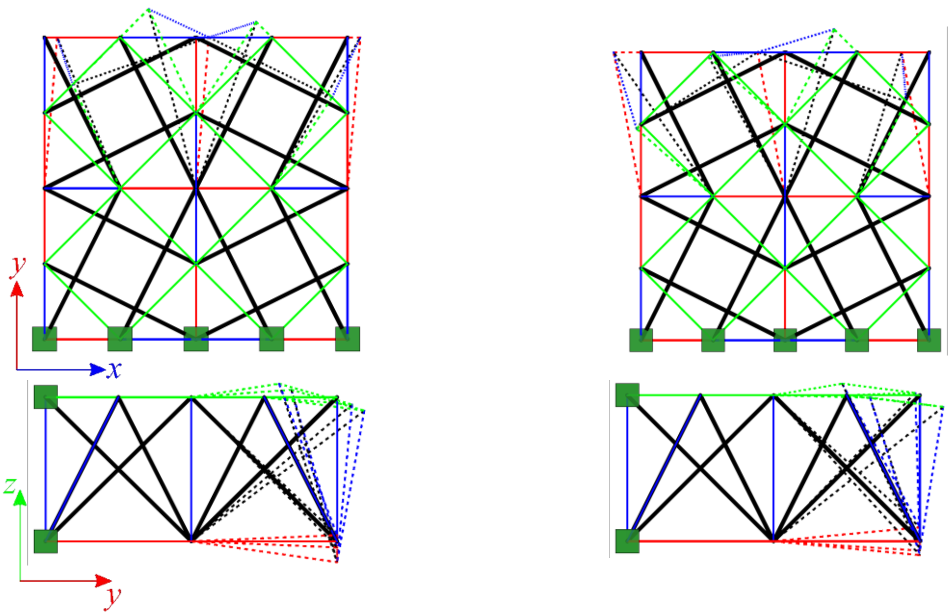


Rys. 5.51. Postacie mechanizmów dla modelu: a) MQ4-1, b) MQ4-2

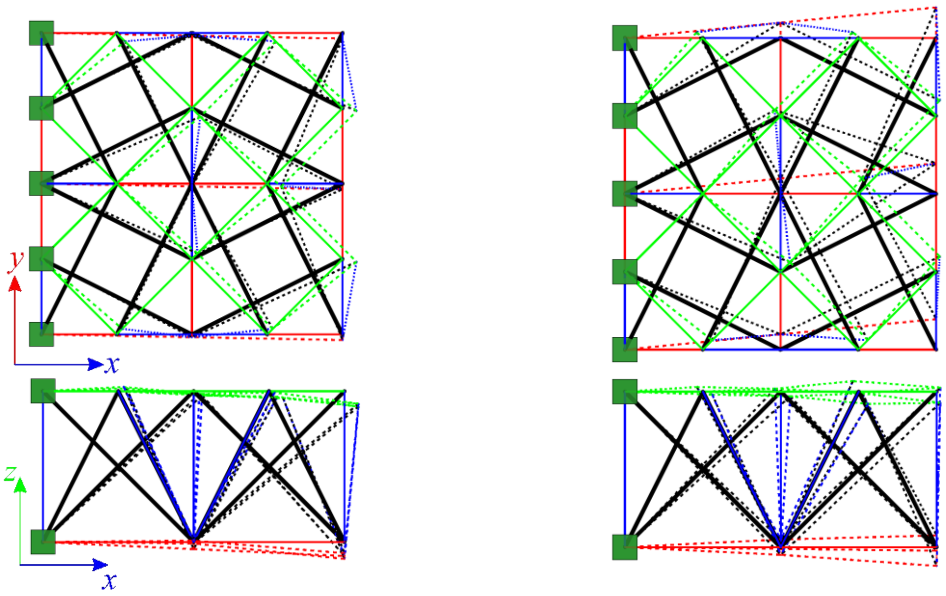


Rys. 5.52. Postacie mechanizmów dla modelu MQ4-3

Dla modeli 4-modułowych płyt utwierdzonych na jednej krawędzi (modeli MQ4-4 i MQ4-5) zidentyfikowano po dwa mechanizmy infinitezymalne. W przypadku modelu MQ4-4 (rys. 5.53) mechanizm realizowany jest lokalnie (poprzez część konstrukcji) – przemieszczają się jedynie węzły od strony swobodnej krawędzi konstrukcji. W przypadku modelu MQ4-5 (rys. 5.54) mechanizm nie ma już charakteru lokalnego i mechanizm realizowany jest przez całą konstrukcję.



Rys. 5.53. Postacie mechanizmów dla modelu MQ4-4

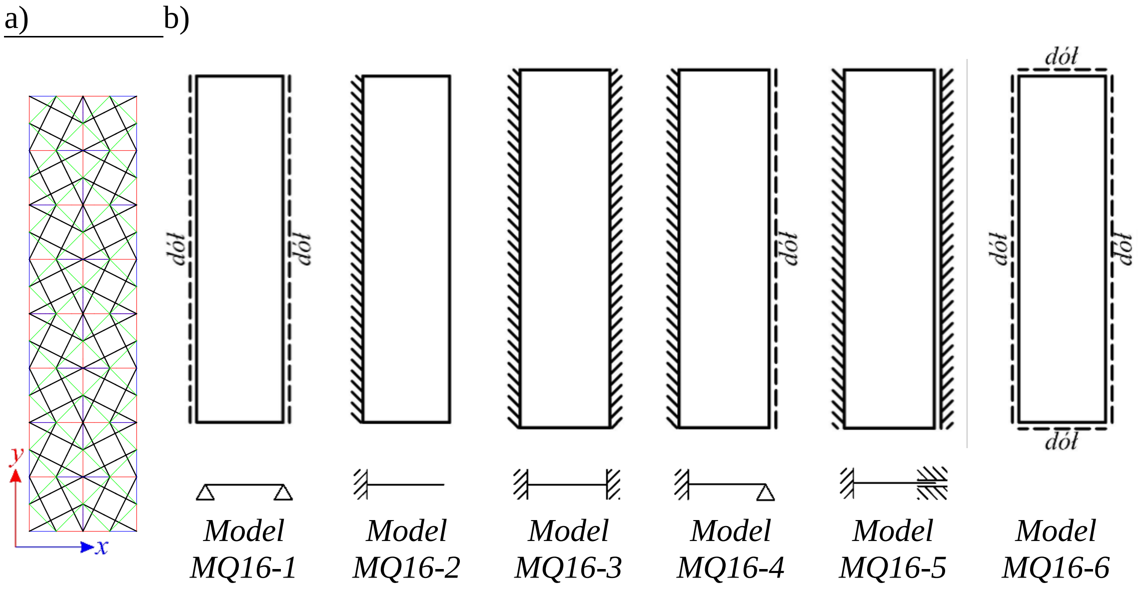


Rys. 5.54. Postacie mechanizmów dla modelu MQ4-5

5.6.2. 16-modułowa płyta *modified Quartex*

Kolejną rozważaną strukturą jest płyta zbudowana z szesnastu modułów *modified Quartex* (rys. 5.55a), która składa się z 212 elementów (n = 212) i 69 węzłów (w = 69). Rozważono następujące schematy podparcia (rys. 5.55b):

- ***model MQ16-1*** – płyta swobodnie podparta dołem na dwóch krawędziach w kierunku *y* (54 więzy),
- ***model MQ16-2*** – płyta swobodnie podparta górą i dołem na jednej krawędzi (utwierdzenie) w kierunku *y* (51 więzów),
- ***model MQ16-3*** – płyta swobodnie podparta górą i dołem na dwóch krawędziach (utwierdzenie) w kierunku *y* (102 więzy),
- ***model MQ16-4*** – płyta swobodnie podparta górą i dołem na jednej krawędzi oraz swobodnie podparta dołem na drugiej krawędzi (utwierdzenie) w kierunku *y* (78 więzów),
- ***model MQ16-5*** – płyta swobodnie podparta górą i dołem na dwóch przeciwległych krawędziach w kierunku *y*, ale ze zwolnieniem przesuwu na kierunku poprzecznym (utwierdzenie + utwierdzenie z możliwym przesunięciem) w kierunku *x* (85 więzów),
- ***model MQ16-6*** – płyta swobodnie podparta w płaszczyźnie dolnej na dwóch przeciwległych krawędziach w kierunku *y* (61 więzów).



Rys. 5.55. 16-modułowa płyta *modified Quartex:* a) geometria, b) modele obliczeniowe

Wyniki analizy jakościowej 16-modułowych płyt *modified Quartex* przedstawiono w tabeli 5.27. Wszystkie modele charakteryzują się cechami: ***S***, ***W*** i ***C***, jednak, z uwagi na połączenia modułów w układzie węzeł-węzeł, struktury te nie spełniają cechy o nieciągłości elementów ściskanych (***N***). Modele MQ16-1 oraz MQ16-6, charakteryzujące się występowaniem mechanizmu (***M***), zaliczono do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 1, natomiast modele MQ16-2 – MQ16-5, ze względu na brak mechanizmów, należy zakwalifikować do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 2.

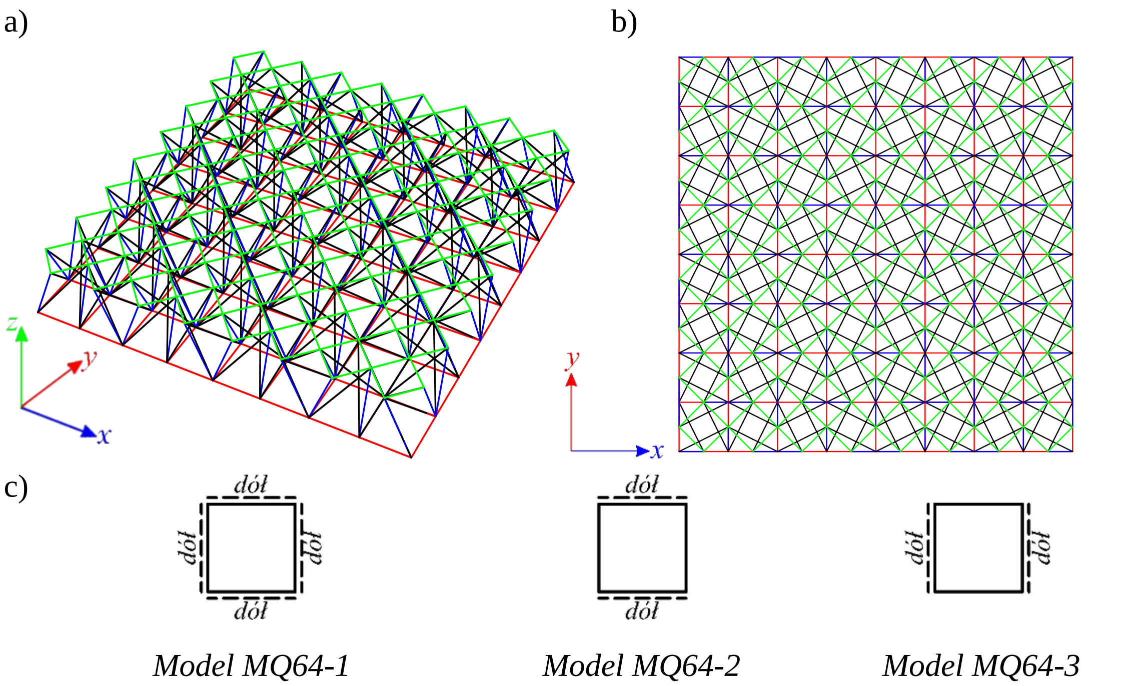
Tabela 5.27. *Rezultaty analizy jakościowej dla 16-modułowych płyt* modified Quartex

Model	**Liczba węzłów (*w*)**	**Liczba elementów (*n*)**	**Liczba swobodnych stopni swobody *(m)***	**Liczba mechanizmów *(lm)***	**Liczba stanów samonaprężenia *(lss)***	**Sprawdzenie *(n-m)***	***(lss-lm)***	**Klasyfikacja**
MQ16-1	69	212	153	1	60	59	59	konstrukcje o cechach tensegrity klasy 1
MQ16-2			156	0	56	56	56	konstrukcje o cechach tensegrity klasy 2
MQ16-2			105	0	107	107	107	
MQ16-3			129	0	83	83	83	
MQ16-4			122	0	90	90	90	
MQ16-6			146	1	67	66	66	konstrukcje o cechach tensegrity klasy 1

5.6.3. 64-modułowa płyta *modified Quartex*

W następnym kroku rozważono płytę zbudowaną z sześćdziesięciu czterech modułów *modified Quartex* (rys. 5.56a, 5.56b). Struktura składa się z 800 elementów (n = 800) i 225 węzłów (w = 225) Rozpatrzono następujące schematy podparcia (rys. 5.56c):

- ***model MQ64-1*** – płyta swobodnie podparta w płaszczyźnie dolnej na czterech krawędziach (94 więzy),
- ***model MQ64-2*** – płyta swobodnie podparta w płaszczyźnie dolnej na dwóch przeciwległych krawędziach w kierunku *x* (54 więzy),
- ***model MQ64-3*** – płyta swobodnie podparta w płaszczyźnie dolnej na dwóch przeciwległych krawędziach w kierunku *y* (54 więzy).



Rys. 5.56. Płyta 64-modułowa *modified Quartex*: a) widok 3D, b) widok w płaszczyźnie *xy*, c) modele obliczeniowe

Wyniki analizy jakościowej 64-modułowych płyt *Quartex* przedstawiono w tabeli 5.28. Wszystkie modele charakteryzują się cechami: ***S***, ***W*** i ***C***, jednak, z uwagi na połączenia modułów w układzie węzeł-węzeł, struktury te nie spełniają cechy o nieciągłości elementów ściskanych (***N***). Ponadto, wszystkie analizowane modele charakteryzują się występowaniem mechanizmu (***M***), dzięki czemu należy je zakwalifikować do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 1. W odróżnieniu od modeli MQ4-2 i MQ4-3 płyt 4-modułowych, w przypadku płyt 64-modułowych nie wykryto różnicy w ilości zidentyfikowanych stanów samonaprężenia oraz mechanizmów dla modeli MQ64-2 i MQ64-3.

Tabela 5.28. *Rezultaty analizy jakościowej dla 64-modułowych płyt modified Quartex*

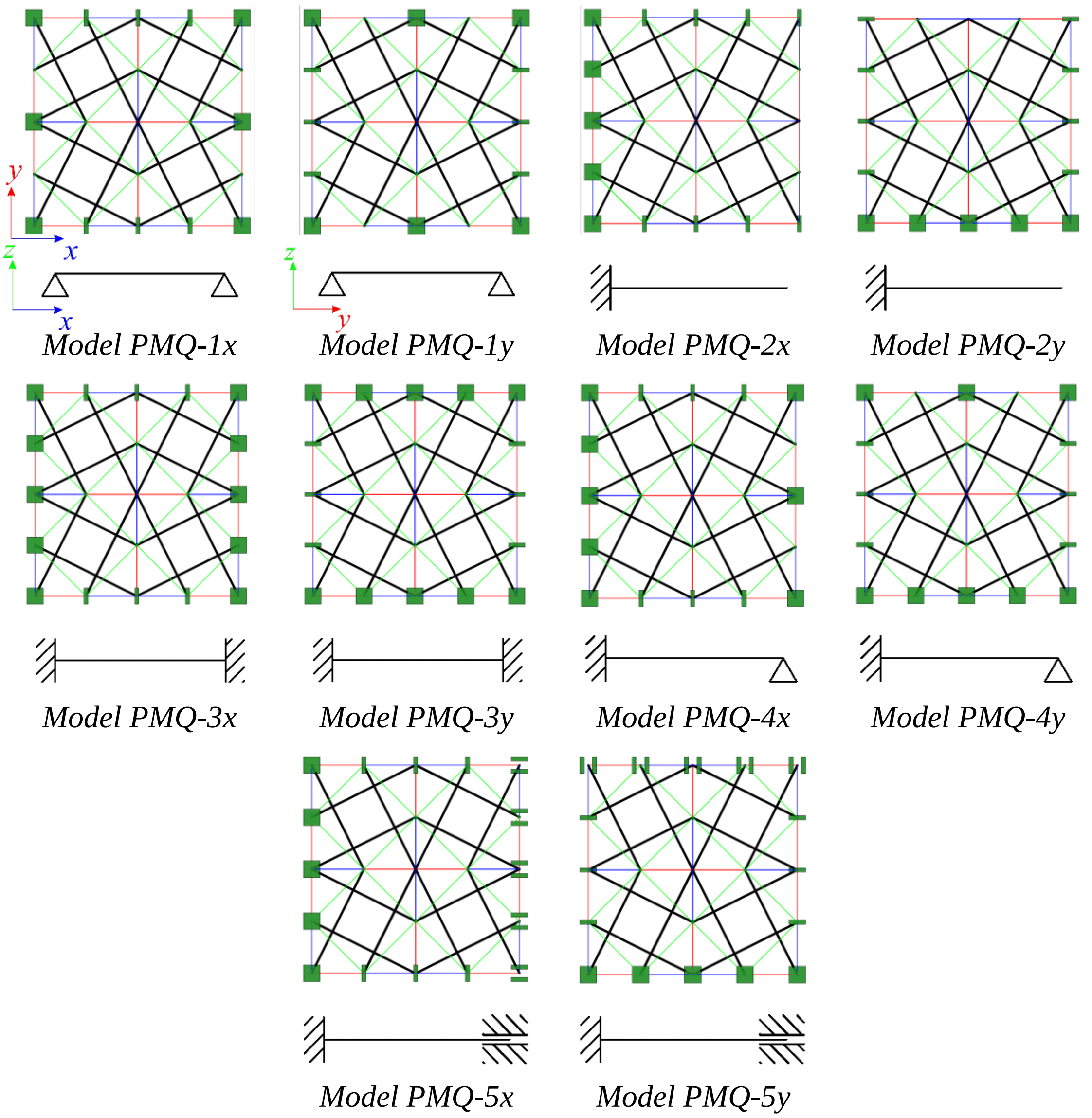
Model	Liczba węzłów (*w*)	Liczba elementów (*n*)	Liczba swobodnych stopni swobody *(m)*	Liczba mechanizmów *(lm)*	Liczba stanów samonaprężenia *(lss)*	Sprawdzenie *(n-m)*	*(lss-lm)*	Klasyfikacja
MQ64-1	225	800	579	1	222	221	221	konstrukcje o cechach tensegrity klasy 1
MQ64-2, MQ64-3			621	1	180	179	179	

5.6.4. Pasmo płytowe *modified Quartex*

Następną rozważaną strukturą jest pasmo płytowe struktury zbudowanej z modułów *modified Quartex.* Zamodelowano płytę zbudowaną z czterech modułów *modified Quartex*, dla której, w zależności od rozważanego schematu statycznego, blokowano możliwość przesuwu na kierunku *x* (gdy podpory umieszczono wzdłuż osi *x*) lub *y* (gdy podpory umieszczono wzdłuż osi *y*). Rozpatrzono następujące modele (rys. 5.57):

- ***model PMQ-1x*** – pasmo płytowe swobodnie podparte w płaszczyźnie dolnej na dwóch przeciwległych krawędziach w kierunku *y* (24 więzy),
- ***model PMQ-1y*** – pasmo płytowe swobodnie podparte w płaszczyźnie dolnej na dwóch przeciwległych krawędziach w kierunku *x* (24 więzy),
- ***model PMQ-2x*** – pasmo płytowe swobodnie podparte górą i dołem na jednej krawędziach (sztywne zamocowanie) w kierunku *y* (23 więzy),
- ***model PMQ-2y*** – pasmo płytowe swobodnie podparte górą i dołem na jednej krawędziach (sztywne zamocowanie) w kierunku *x* (23 więzy),
- ***model PMQ-3x*** – pasmo płytowe swobodnie podparte górą i dołem na obu krawędziach (sztywne zamocowanie) w kierunku *y* (36 więzów),
- ***model PMQ-3y*** – pasmo płytowe swobodnie podparte górą i dołem na obu krawędziach (sztywne zamocowanie) w kierunku *x* (36 więzów),
- ***model PMQ-4x*** – pasmo płytowe swobodnie podparte górą i dołem na jednej krawędziach (sztywne zamocowanie) i dołem na krawędzi przeciwległej (swobodne podparcie) w kierunku *y* (30 więzów),

- ***model PMQ-4y*** – pasmo płytowe swobodnie podparte górą i dołem na jednej krawędziach (sztywne zamocowanie) i dołem na krawędzi przeciwległej (swobodne podparcie) w kierunku *x* (30 więzów),
- ***model PMQ-5x*** – pasmo płytowe swobodnie podparte górą i dołem na dwóch przeciwległych krawędziach w kierunku *y*, ale ze zwolnieniem przesuwu na kierunku poprzecznym (sztywne zamocowanie + łyżwa) (31 więzów),
- ***model PMQ-5y*** – pasmo płytowe swobodnie podparte górą i dołem na dwóch przeciwległych krawędziach w kierunku *x*, ale ze zwolnieniem przesuwu na kierunku poprzecznym (sztywne zamocowanie + łyżwa) (31 więzów).



Rys. 5.57. Modele analizowanych pasm płytowych zbudowanych z modułów *modified Quartex*

Wyniki analizy jakościowej pasm płytowych *modified Quartex* przedstawiono w tabeli 5.29. Wszystkie modele charakteryzują się cechami: ***S***, ***W*** i ***C***, jednak, z uwagi na połączenia modułów w układzie węzeł-węzeł, struktury te nie spełniają cechy o nieciągłości elementów ściskanych (***N***). Modele PP-1, charakteryzujące się występowaniem mechanizmu (***M***), zaliczono do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 1, natomiast modele MQ16-2 – MQ16-5, ze względu na brak mechanizmów, należy zakwalifikować do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 2. Porównując otrzymane rezultaty z wynikami otrzymanymi dla korespondujących modeli 16-modułowych płyt *Quartex,* można stwierdzić, że zachowana została liczba zidentyfikowanych mechanizmów, tzn. dla modeli swobodnie podpartych, tj. MQ16-1 oraz PMQ-1y zidentyfikowano po jednym mechanizmie, natomiast dla pozostałych modeli (MQ16-2 –MQ16-5 oraz PMQ-2y – PMQ5y) nie zidentyfikowano ani jednego mechanizmu.

Tabela 5.29. *Rezultaty analizy jakościowej dla pasm płytowych modified Quartex*

Liczba modułów	Model	Liczba węzłów (*w*)	Liczba elementów (*n*)	Liczba swobodnych stopni swobody (*m*)	Liczba mechanizmów (*lm*)	Liczba stanów samonaprężenia (*lss*)	Sprawdzenie (*n-m*)	Sprawdzenie (*lss-lm*)	Klasyfikacja
4	PMQ-1x, PMQ-1y	21	56	39	1	18	17	17	konstrukcje o cechach tensegrity klasy 1
	PMQ-2x, PMQ-2y			40	0	16	16	16	konstrukcje o cechach tensegrity klasy 2
	PMQ-3x, PMQ-3y			27	0	29	29	29	
	PMQ-4x, PMQ-4y			33	0	23	23	23	
	PMQ-5x, PMQ-5y			32	0	24	24	24	

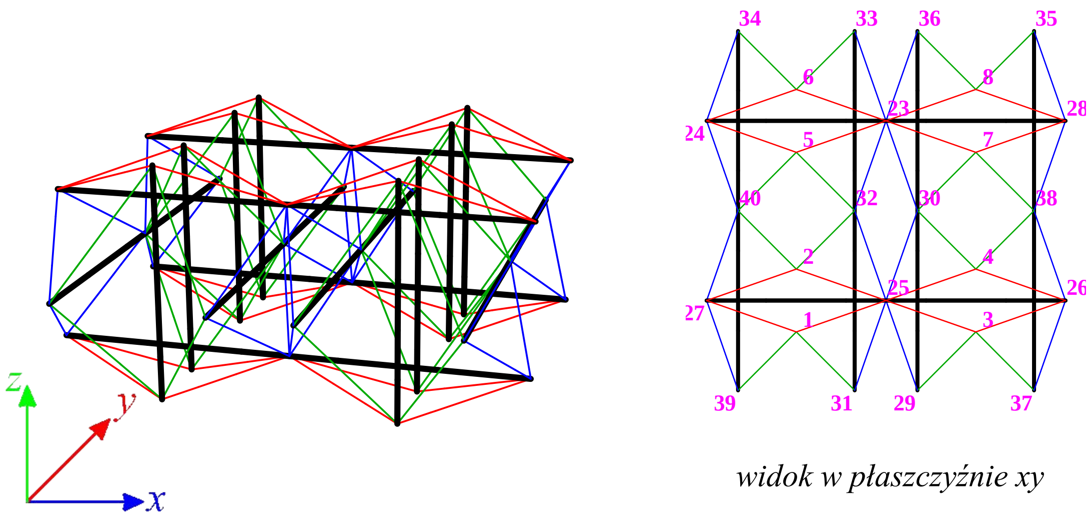
5.7. Struktury zbudowane z modułu *expanded Octahedron*

Kolejną analizowaną grupą konstrukcji są dwuwarstwowe kratownice zbudowane z modułów *expanded Octahedron.* Kolejno przeprowadzono analizę jakościową płyty 4-modułowej, płyty 32-modułowej i płyty 64-modułowej.

5.7.1. Płyta 4-modułowa *expanded Octahedron*

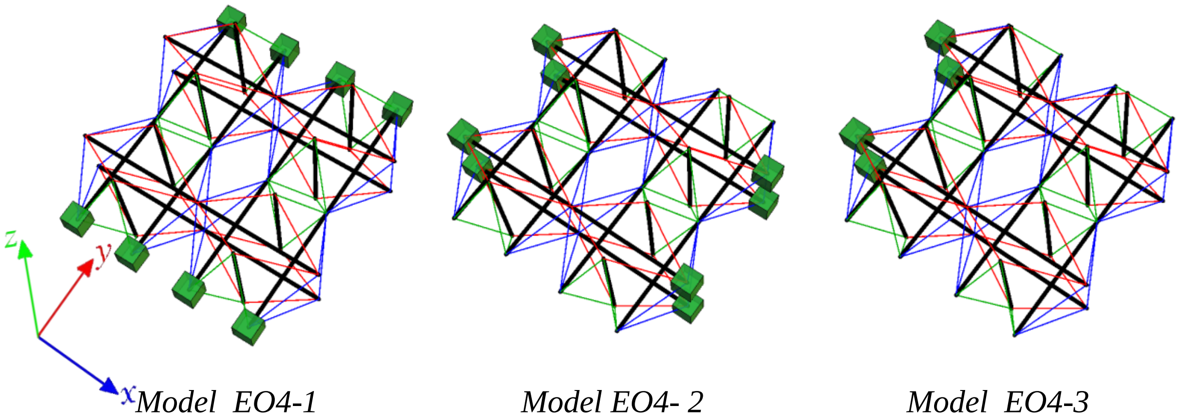
Pierwszą rozważaną konstrukcją jest płyta zbudowana z czterech modułów *expanded Octahedron* (rys. 5.58), która składa się z 120 elementów ($n = 120$) i 40 węzłów ($w = 40$). Rozpatrzono następujące schematy podparcia (rys. 5.59):

- ***model EO4-1*** – swobodnie podparty w płaszczyźnie środkowej na dwóch przeciwległych krawędziach w kierunku *x* (24 więzy),
- ***model EO4-2*** – swobodnie podparty w płaszczyźnie środkowej na dwóch przeciwległych krawędziach w kierunku *y* (24 więzy),
- ***model EO4-3*** – swobodnie podparty w płaszczyźnie środkowej na jednej krawędzi w kierunku *y* – wspornik (12 więzów).



widok w płaszczyźnie xy

Rys. 5.58. Geometria 4-modułowej płyty *expanded Octahedron*



Model EO4-1 *Model EO4- 2* *Model EO4-3*

Rys. 5.59. Modele analizowanych 4-modułowych płyt *expanded Octahedron*

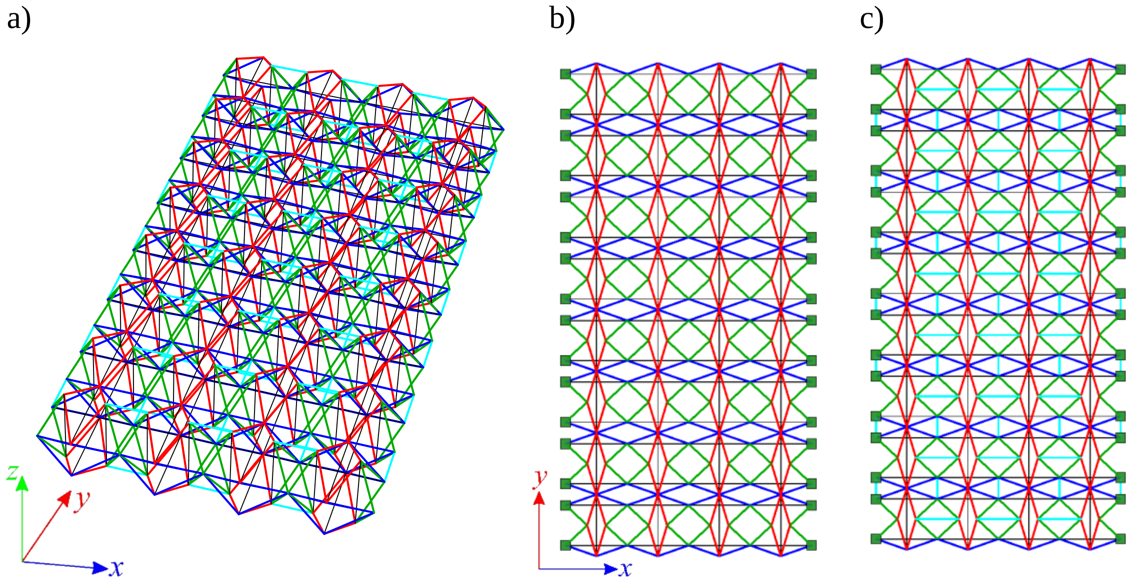
Wyniki analizy jakościowej 4-modułowych płyt *expanded Octahedron* przedstawiono w tabeli 5.30. We wszystkich analizowanych modelach zidentyfikowane zostały stany samonaprężenia (***S***), przy czym ich liczba zależy od sposobu podparcia. Otrzymane stany samonaprężenia w różny sposób definiują elementy konstrukcji, ale uwzględnienie stanów samonaprężenia otrzymanych w przypadku pojedynczego modułu (rys. 5.13) pozwala zidentyfikować rodzaje elementów (siły od stanów samonaprężenia w elementach wspólnych były stosownie powielone). Wszystkie modele charakteryzują się cechami ***W*** i ***C***, jednak, z uwagi na połączenia modułów w układzie węzeł-węzeł, struktury te nie spełniają cechy o nieciągłości elementów ściskanych (***N***). Model EO-1, charakteryzujący się występowaniem mechanizmu (***M***), zaliczono do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 1, natomiast modele EO-2 – EO-3, ze względu na brak mechanizmów, należy zakwalifikować do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 2.

Tabela 5.30. *Rezultaty analizy jakościowej dla pasm płytowych expanded Octahedron*

<table>
<tr><th rowspan="2">Model</th><th rowspan="2">Liczba węzłów (w)</th><th rowspan="2">Liczba elementów (n)</th><th rowspan="2">Liczba swobodnych stopni swobody (m)</th><th rowspan="2">Liczba mechanizmów (lm)</th><th rowspan="2">Liczba stanów samonaprężenia (lss)</th><th colspan="2">Sprawdzenie</th><th rowspan="2">Klasyfikacja</th></tr>
<tr><th>(n-m)</th><th>(lss-lm)</th></tr>
<tr><td>EO4-1</td><td rowspan="3">40</td><td rowspan="3">120</td><td>96</td><td>1 (nieustabilizowany)</td><td>25</td><td>24</td><td>24</td><td>nie tensegrity</td></tr>
<tr><td>EO4-2</td><td>96</td><td>0</td><td>24</td><td>24</td><td>24</td><td rowspan="2">konstrukcje o cechach tensegrity klasy 2</td></tr>
<tr><td>EO4-3</td><td>108</td><td>0</td><td>12</td><td>12</td><td>12</td></tr>
</table>

5.7.2. Płyta 32-modułowa *expanded Octahedron*

Kolejną rozpatrywaną konstrukcją jest płyta zbudowana z trzydziestu dwóch modułów *expanded Octahedron* (rys. 5.60a), która składa się z 960 elementów ($n = 960$) i 280 węzłów ($w = 280$). Rozpatrzono model EO32-1, kiedy struktura jest swobodnie podparta w płaszczyźnie środkowej na dwóch przeciwległych krawędziach w kierunku x (96 więzy). Rozważono także analogicznie podparty model MEO32-1, w którym wprowadzono dodatkowe cięgna ($n = 1043$). Modele płyt przedstawiono na rysunkach 5.60b i 5.60c.



model EO32-1 *model MEO32-1*

Rys. 5.60. a) Geometria 32-modułowych płyt *expanded Octahedron*, b), c) analizowane modele

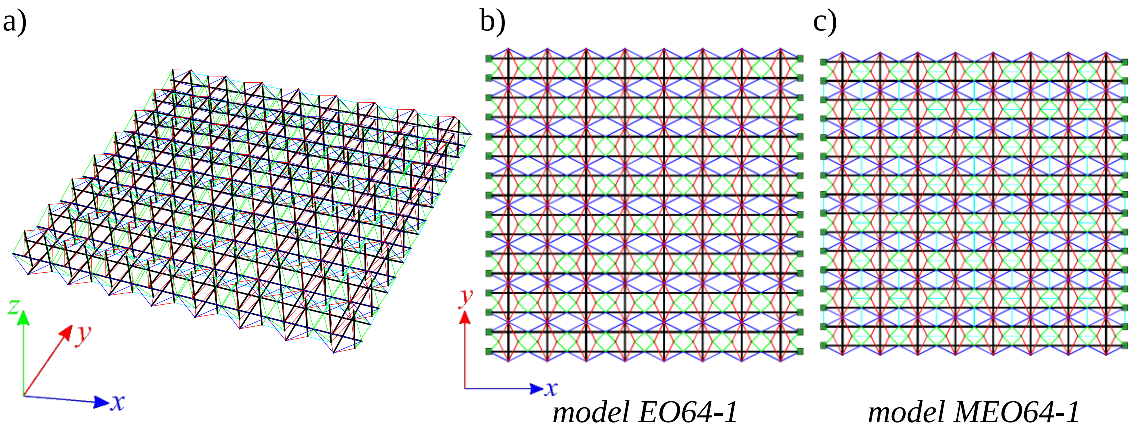
Wyniki analizy jakościowej 32-modułowych płyt *expanded Octahedron* przedstawiono w tabeli 5.31. W obu analizowanych modelach zidentyfikowane zostały stany samonaprężenia (***S***), przy czym ich liczba zależy od sposobu podparcia. Otrzymane stany samonaprężenia w różny sposób definiują elementy konstrukcji, ale uwzględnienie stanów samonaprężenia otrzymanych w przypadku pojedynczego modułu (rys. 5.13) pozwala zidentyfikować rodzaje elementów (siły od stanów samonaprężenia w elementach wspólnych były stosownie powielone). Wszystkie modele charakteryzują się cechami ***W*** i ***C***, jednak, z uwagi na połączenia modułów w układzie węzeł-węzeł, struktury te nie spełniają cechy o nieciągłości elementów ściskanych (***N***). Model EQ32-1, dla którego zidentyfikowano 3 nieustabilizowane mechanizmy, nie jest konstrukcją tensegrity. Modele MEQ32-1, ze względu na brak mechanizmów, należy zakwalifikować do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 2.

Tabela 5.31. *Rezultaty analizy jakościowej dla 32-modułowych płyt expanded Octahedron*

Model	Liczba węzłów (*w*)	Liczba elementów (*n*)	Liczba swobodnych stopni swobody (*m*)	Liczba mechanizmów (*lm*)	Liczba stanów samonaprężenia (*lss*)	Sprawdzenie (*n-m*)	Sprawdzenie (*lss-lm*)	Klasyfikacja
EO32-1	280	960	744	3 (nieustabilizowane)	219	216	216	nie tensegrity
MEO32-1	280	1043	744	0	299	296	299	konstrukcje o cechach tensegrity klasy 2

5.7.3. Płyta 64-modułowa *expanded Octahedron*

Następną rozpatrywaną konstrukcją jest płyta zbudowana z sześćdziesięciu czterech modułów *expanded Octahedron (*rys. 5.61a*)*, która składa się z 1920 elementów ($n = 1920$) i 544 węzłów ($w = 544$). Rozpatrzono model EO64-1, kiedy struktura jest swobodnie podparta w płaszczyźnie środkowej na dwóch przeciwległych krawędziach w kierunku x (96 więzy). Rozważono także analogicznie podparty model MEO64-1, w którym wprowadzono dodatkowe cięgna ($n = 2095$). Modele płyt przedstawiono na rysunkach 5.61b, c.



Rys. 5.61. a) Geometria 64-modułowych płyt *expanded Octahedron*, b), c) analizowane modele

Wyniki analizy jakościowej 64-modułowych płyt *expanded Octahedron* przedstawiono w tabeli 5.32. W obu analizowanych modelach zidentyfikowane zostały stany samonaprężenia (***S***), przy czym ich liczba zależy od sposobu podparcia. Otrzymane stany samonaprężenia w różny sposób definiują elementy konstrukcji, ale uwzględnienie stanów samonaprężenia otrzymanych w przypadku pojedynczego modułu (rys. 5.13) pozwala zidentyfikować rodzaje elementów (siły od stanów samonaprężenia w elementach wspólnych były stosownie powielone). Wszystkie modele charakteryzują się cechami ***W*** i ***C***, jednak, z uwagi na połączenia modułów w układzie węzeł-węzeł, struktury te nie spełniają cechy o nieciągłości elementów ściskanych (***N***). Model EQ64-1, dla którego zidentyfikowano 7 nieustabilizowanych mechanizmów, nie jest konstrukcją tensegrity. Model MEQ64-1, ze względu na brak mechanizmów, należy zakwalifikować do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 2.

Tabela 5.32. *Rezultaty analizy jakościowej dla 64-modułowych płyt expanded Octahedron*

Model	**Liczba węzłów (*w*)**	**Liczba elementów (*n*)**	**Liczba swobodnych stopni swobody *(m)***	**Liczba mechanizmów *(lm)***	**Liczba stanów samonaprężenia *(lss)***	**Sprawdzenie**		**Klasyfikacja**
						(n-m)	***(lss-lm)***	
EO64-1	544	1920	1536	7 (nieustabilizowane)	391	384	384	nie tensegrity
MEO64-1		2095	1536	0	559	559	559	konstrukcje o cechach tensegrity klasy 2

5.8. Podsumowanie

W rozdziale 5 przeprowadzono analizę jakościową struktur tensegrity. Rozpatrzono zachowanie podstawowych pojedynczych modułów tensegrity (*Simplex, modified Simplex, Quartex, modified Quartex* oraz *expanded Octahedron*) oraz szerokiej gamy konstrukcji powierzchniowych zbudowanych za pomocą tych modułów. Do *idealnych tensegrity* zakwalifikowano wszystkie pojedyncze moduły tensegrity, natomiast struktury wielomodułowe zbudowane z modułów *Simplex* i *Quatrex*, ze względu na sposób łączenia modułów, można zakwalifikować jedynie do *konstrukcji o cechach tensegrity klasy 1* lub *konstrukcji o cechach tensegrity klasy 2*. Szczególną uwagę należy tu zwrócić na płyty zbudowane z modułów *expanded Octahedron*. W tym przypadku stabilną konfigurację można uzyskać jedynie poprzez wprowadzenie dodatkowych cięgien, które usztywniają konstrukcję, ale skutkują zakwalifikowaniem do *konstrukcji o cechach tensegrity klasy 2*. Wśród rozpatrywanych przykładów brak jest *„czystych" tensegrity*.

Identyfikacja dwóch najistotniejszych cech tensegrity, tj. stanów samonaprężenia i mechanizmów infinitezymalnych, jest istotnym czynnikiem w celu właściwej klasyfikacji i oceny zachowania konstrukcji pod wpływem oddziaływań zewnętrznych. W literaturze wiele struktur bez mechanizmów określa się jako tensegrity, ale zachowują się one znacząco inaczej niż struktury charakteryzujące się występowaniem mechanizmu. W przypadku struktur bez mechanizmu nie jest możliwa kontrola parametrów statycznych, co zostanie przedstawione w kolejnym rozdziale, dotyczącym analizy ilościowej struktur tensegrity. Aktywne sterowanie strukturami tensegrity jest możliwe tylko wtedy, gdy struktura klasyfikowana jest jako *czyste tensegrity*, *idealne tensegrity* lub *konstrukcja o cechach tensegrity klasy 1*, czyli generalnie wtedy, gdy występuje mechanizm. Dla tych klas na sztywność konstrukcji, oprócz geometrii modelu i właściwości materiałowych, ma wpływ również poziom stanu samonaprężenia. Ostatnia klasa, *konstrukcje o cechach tensegrity klasy 2* (bez mechanizmu), jest niewrażliwa na zmianę poziomu sił stanu samonaprężenia.

W związku z powyższym, w kolejnym rozdziale pominięto konstrukcje zbudowane z modułów *expanded Octahedron,* w przypadku których konieczność wprowadzenia dodatkowych cięgien, pozbawiła ich mechanizmu.

ROZDZIAŁ 6.

ILOŚCIOWA OCENA KONSTRUKCJI

6.1. Wprowadzenie

Pierwszym etapem analizy struktur tensegrity była ocena jakościowa polegająca na identyfikacji cech charakterystycznych. Na tej podstawie dokonano kwalifikacji do jednej z czterech grup, tj. *idealne tensegrity*, „*czyste” tensegrity* i *konstrukcje o cechach tensegrity klasy 1 lub klasy 2.* Ta klasyfikacja ma istotne znaczenie z uwagi na różne zachowanie się konstrukcji pod wpływem oddziaływań zewnętrznych. Do określenia stanów samonaprężenia $\mathbf{y}_i$ zastosowano analizę liniową, przy czym w celu identyfikacji mechanizmów infinitezymalnych, koniecznym było użycie macierzy sztywności geometrycznej (analiza quasi-liniowa – II rzędu). Drugi etap, czyli ocenę ilościową, obejmującą obliczenia odpowiedzi konstrukcji na działanie obciążeń statycznych, wykonano stosując analizę quasi-liniową (teoria II rzędu):

$$(\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_G(\mathbf{S}) - \sigma\mathbf{I})\mathbf{z} = 0 \tag{6.1}$$

i nieliniową (teoria III rzędu):

$$(\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_G(\mathbf{S}) + \mathbf{K}_{NL}(\mathbf{q}) - \sigma\mathbf{I})\mathbf{z} = 0. \tag{6.2}$$

Niezależnie od zastosowanej do obliczeń teorii, należy sprawdzić stateczność konstrukcji, czyli dodatnią określoność odpowiedniej macierzy sztywności.

Siły normalne w elementach określono w funkcji sił stanu samonaprężenia S:

$$N^j = y_{ij}S. \tag{6.3}$$

Jako minimalny poziom stanu samonaprężenia w rozpatrywanych konstrukcjach przyjmowano taką wartość, która pozwoliła na odpowiednią identyfikację elementów w strukturze, tj. w cięgnach występowała siła rozciągająca, w zastrzałach – ściskająca. Wartość maksymalnego poziomu sił stanu samonaprężenia zależy dobrano tak, aby nie przekroczyć nośności elementów struktury.

W celu umożliwienia oceny zachowania się różnych konstrukcji i przeprowadzenia analizy porównawczej, obliczenia wykonano przy założeniu konkretnych stałych materiałowych i geometrycznych. Przyjęto, że materiałem konstrukcyjnym jest stal o charakterystykach:

- moduł Younga: $E = 210$ GPa,
- gęstość: $\rho = 7860\ \mathrm{kg/m^3}$,

a w rozwiązaniu konstrukcyjnym zastosowano system cięgnowy Detan firmy Halfen i przyjęto następujące dane katalogowe [Halfen Detan, 2020]:

- **cięgna** typu A [PN-EN 1993-1-11, 2010] ze stali S460N:
  - średnica: $\phi = 20$ mm,
  - moment bezwładności: $I = 7{,}85 \cdot 10^{-9}$ m^4,
  - pole przekroju: $A = 3{,}14 \cdot 10^{-4}$ m^2,
  - nośność uwzględniająca współczynnik bezpieczeństwa po stronie materiałowej: $N_{Rd} = 110{,}2$ kN (85% $N_{Rd} = 93{,}7$ kN),
  - maksymalna siła sprężenia w cięgnach $N_{c,max}$ zależy od stanów samonaprężenia,
- **zastrzały rurowe** ze stali S355J2:
  - średnica: $\phi = 76{,}1$ mm,
  - grubość ścianki: $t = 2{,}9$ mm,
  - moment bezwładności: $I = 4{,}47 \cdot 10^{-7}$ m^4,
  - pole przekroju: $A = 6{,}88 \cdot 10^{-4}$ m^2,
  - nośność: Tabela 6.1 [PN-EN 1993-1-1, 2010],
  - maksymalna siła sprężenia w zastrzałach wynosi: $N_{z,max} = -1 \cdot S$ (S – poziom stanu samonaprężenia).

Tabela 6.1. *Nośność zastrzałów*

L [m]	1,0	1,33	1,5	1,65
$N_{b,Rd}$ [kN]	218,4	203,5	193,9	183,7

W celu wprowadzenia możliwości oceny globalnej wpływu stanu samonaprężenia na sztywność struktury, w pracy posłużono się tzw. *globalnym parametrem sztywności* GPS [Obara, 2019a]. Parametr ten pozwala porównać stosunek energii odkształcenia przy minimalnym oraz przy i–tym poziomie stanu samonaprężenia:

$$GPS = \frac{[\mathbf{q}(S_{min})]^T \mathbf{K}_S(S_{min})\mathbf{q}(S_{min})}{[\mathbf{q}(S_i)]^T \mathbf{K}_S(S_i)\mathbf{q}(S_i)}, \tag{6.4}$$

gdzie $\mathbf{K}_S(S_{min})$ i $\mathbf{q}(S_{min})$ są odpowiednio sieczną macierzą sztywności i wektorem przemieszczeń konstrukcji przy minimalnym poziomie stanu samonaprężenia, natomiast $\mathbf{K}_S(S_i)$ i $\mathbf{q}(S_i)$ – przy i–tym poziomie stanu samonaprężenia.

6.2. Podstawowe moduły trójwymiarowe

W poniższym rozdziale, analogicznie jak w 5.2, skupiono się na modułach opartych na bryle graniastosłupa prawidłowego – *Simplex* i *Quartex*, ich zmodyfikowanych formach – *modified Simplex* i *modified Quartex* – oraz module powstałym poprzez jednokrotne rozszerzenie ośmiościanu foremnego – *expanded Octahedron*.

6.2.1. Moduł *Simplex*

Pierwszą rozważaną strukturą jest moduł *Simplex*, dla którego zidentyfikowano jeden stan samonaprężenia $\mathbf{y}_{12}$ i jeden mechanizm $\mathbf{x}_{12}$ (rozdział 5.2.1). Długość zastrzałów konstrukcji wynosi $L = 1{,}5$ m, a ich nośność – $N_{b,Rd} = 193{,}9$ kN. Maksymalna siła sprężająca w cięgnach wynosi $N_{max} = 0{,}697 \cdot S$.

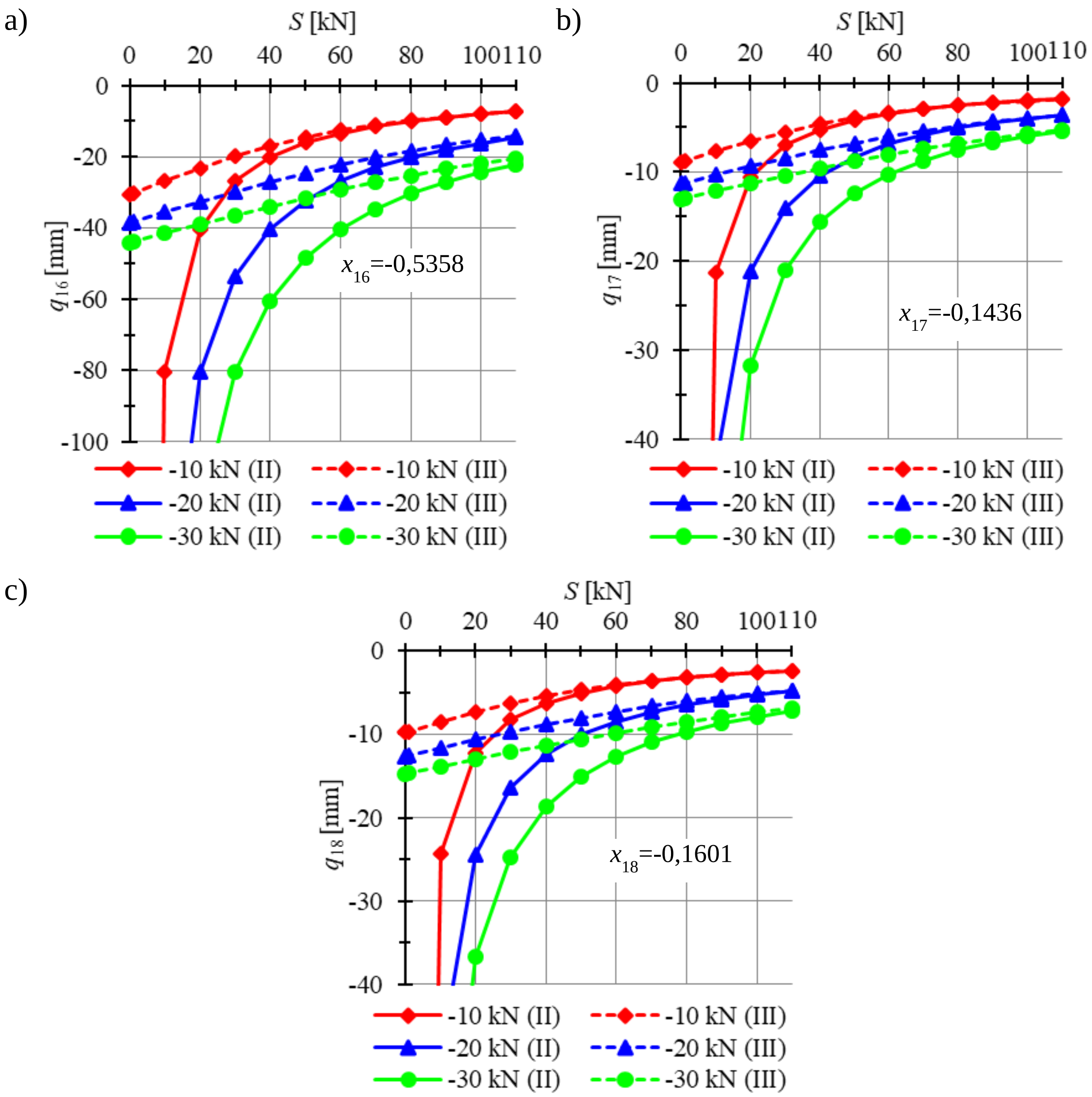
Przyjęto minimalny i maksymalny stan samonaprężenia na poziomie $S_{min} = 0{,}01$ kN oraz $S_{max} = 110$ kN (odpowiadający maksymalnemu wytężeniu cięgna na poziomie 85,7%). Rozpatrzono trzy przypadki obciążenia siłą skupioną, przyłożoną w węźle 6 na kierunku z: $P_{18}^1 = -10$ kN, $P_{18}^2 = -20$ kN i $P_{18}^3 = -30$ kN. Konstrukcja podparta jest w sposób zapewniający brak możliwości wystąpienia ruchów ciała sztywnego (odebrane stopnie swobody: $q_1, q_3, q_5, q_6, q_7, q_9$). Przeanalizowano wpływ stanu samonaprężenia na:

- przemieszczenia węzła 6, tj. q_{16} (rys. 6.1a,), q_{17} (rys. 6.1b) i q_{18} (rys. 6.1c),
- globalny parametr sztywności GPS (rys. 6.2a),
- wytężenie elementów W_{max} (rys. 6.2b).

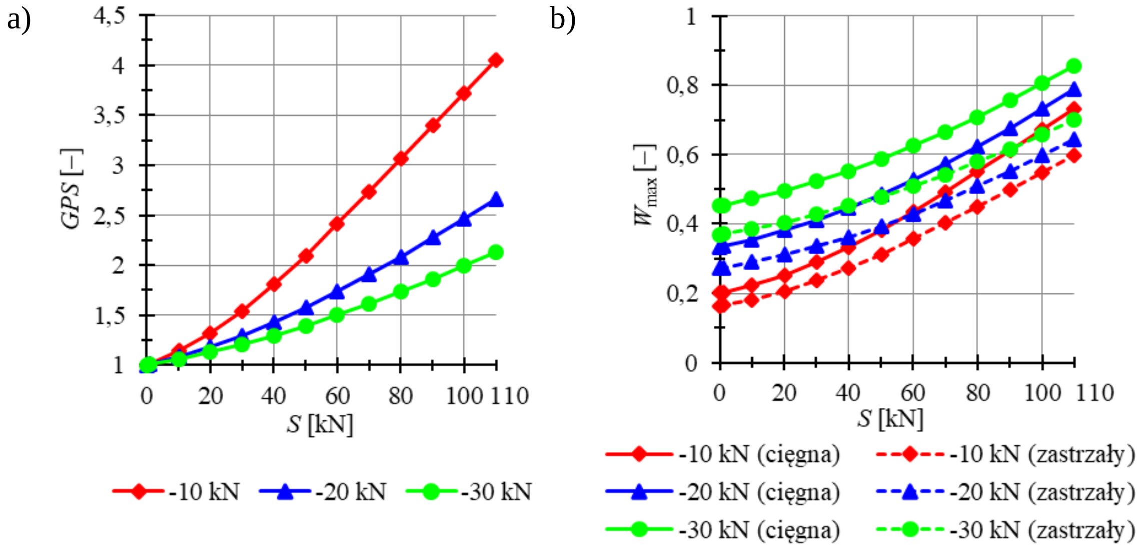
Tabela 6.2 zawiera wartości parametrów statycznych dla minimalnego i maksymalnego przyjętego poziomu stanu samonaprężenia.

Tabela 6.2. *Charakterystyki wytrzymałościowe modułu Simplex*

S [kN]	rodzaj elementu	$(P_{18}^{1} = -10\ \text{kN})$			$(P_{18}^{2} = -20\ \text{kN})$			$(P_{18}^{3} = -30\ \text{kN})$		
		N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]	N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]	N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]
0,01	cięgna	22,1	0,200	1,0	36,8	0,333	1,0	49,8	0,452	1,0
	zastrzały	-31,7	0,163		-52,7	0,272		-71,5	0,369	
110	cięgna	80,8	0,733	4,1	86,9	0,789	2,7	94,4	0,857	2,1
	zastrzały	-116,0	0,598		-124,8	0,644		-135,6	0,700	



Rys. 6.1. Wpływ stanu samonaprężenia S na przemieszczenia: a) q_{16}, b) q_{17}, c) q_{18}



Rys. 6.2. Wpływ stanu samonaprężenia *S* na: a) globalny parametr sztywności GPS, b) wytężenie elementów W_{max} modułu $Simplex$

Wartości przemieszczeń uzyskane z analizy statycznej modułu *Simplex* korespondują z wartościami przemieszczeń uzyskanymi dla zidentyfikowanego mechanizmu (x_{16}, x_{17}, x_{18}). Różnice pomiędzy wartościami przemieszczeń uzyskanymi przy zastosowaniu teorii drugiego (II) i trzeciego (III) rzędu są znaczące dla małych wartości stanu samonaprężenia i maleją wraz ze wzrostem poziomu sił sprężających. Wpływ nieliniowości geometrycznej jest także bardziej zauważalny przy wzroście obciążeń zewnętrznych. Przykładowo, dla minimalnej wartości stanu samonaprężenia $S_{\min} = 0{,}01$ kN i najmniejszej rozważonej wartości obciążenia zewnętrznego $P_{18}^{1} = -10$ kN, błąd względny pomiędzy uzyskanymi wartościami przemieszczeń wynosi $2{,}6{\cdot}10^{5}\%$ dla przemieszczenia q_{16}, $2{,}4{\cdot}10^{5}\%$ dla przemieszczenia q_{17} oraz $2{,}5{\cdot}10^{5}\%$ dla przemieszczenia q_{18}, podczas gdy dla tego samego poziomu stanu samonaprężenia i najwyższej rozważanej wartości obciążenia zewnętrznego $P_{18}^{3} = -30$ kN uzyskano błąd względny równy $5{,}5{\cdot}10^{5}\%$ dla przemieszczenia q_{16}, $5{,}0{\cdot}10^{5}\%$ dla przemieszczenia q_{17} oraz $4{,}9{\cdot}10^{5}\%$ dla przemieszczenia q_{18}. Przyjmując maksymalną wartość stanu samonaprężenia $S_{\max} = 110$ kN oraz obciążenie zewnętrze równe $P_{18}^{1} = -10$ kN, błąd względny pomiędzy rezultatami obliczonymi przy zastosowaniu teorii drugiego i trzeciego rzędu wynosi $0{,}74\%$ dla przemieszczenia q_{16}, $1{,}71\%$ dla przemieszczenia q_{17} oraz $0{,}38\%$ dla przemieszczenia q_{18}. Dla maksymalnej wartości stanu samonaprężenia i obciążenia zewnętrznego $P_{18}^{3} = -30$ kN uzyskany błąd względny wynosi 8,63% dla przemieszczenia q_{16}, 2,21% dla przemieszczenia q_{17} oraz 4,67% dla przemieszczenia q_{18}.

Wartość obciążenia wpływa również na sztywność struktury. Im mniejsza wartość obciążenia, tym większy wpływ na sztywność konstrukcji ma poziom sił stanu samonaprężenia. Przyrost poziomu stanu samonaprężenia o 1 kN powoduje średni przyrost parametru GPS o 0,0281 dla $P_{18}^{1} = -10$ kN, 0,0150 dla $P_{18}^{2} = -20$ kN i 0,0107 dla $P_{18}^{3} = -30$ kN.

W przypadku wytężenia elementów struktury, przy przyjętych parametrach materiałowych bardziej wytężone są cięgna. Różnica pomiędzy maksymalnym wytężeniem cięgien i zastrzałów rośnie wraz z przyrostem poziomu sił stanu samonaprężenia. Dla minimalnego poziomu stanu samonaprężenia $S_{\min} = 0{,}01$ kN różnica pomiędzy wytężeniem tych elementów wynosi 3,7 punktów procentowych dla $P_{18}^{1} = -10$ kN i 8,4 punktów procentowych dla $P_{18}^{3} = -30$ kN, natomiast przy maksymalnej wartości sił stanu samonaprężenia $S_{\max} = 110$ kN różnica ta wynosi 13,5 punktów procentowych dla $P_{24}^{1} = -10$ kN i 15,8 punktów procentowych dla $P_{18}^{3} = -30$ kN.

6.2.2. Moduł *modified Simplex*

W przypadku modułu *modified Simplex* zidentyfikowano jeden stan samonaprężenia $\mathbf{y}_{12}$ i jeden mechanizm $\mathbf{x}_{12}$ (rozdział 5.2.2). Długość zastrzałów konstrukcji wynosi $L = 1{,}33$ m, a ich nośność – $N_{b,Rd} = 203{,}5$ kN.

Maksymalna siła sprężająca w cięgnach wynosi $N_{max} = 0{,}791 \cdot S$. Przyjęto minimalny i maksymalny stan stanu samonaprężenia na poziomie $S_{min} = 0{,}01$ kN oraz $S_{max} = 110$ kN (odpowiadający maksymalnemu wytężeniu cięgna na poziomie 91,1%). Rozpatrzono trzy przypadki obciążenia siłą skupioną, przyłożoną na kierunku z w węźle 6: $P_{18}^{1} = -10$ kN, $P_{18}^{2} = -20$ kN i $P_{18}^{3} = -30$ kN. Konstrukcja podparta jest w sposób zapewniający brak możliwości wystąpienia ruchów ciała sztywnego (odebrane stopnie swobody: $q_1, q_3, q_5, q_6, q_7, q_9$).

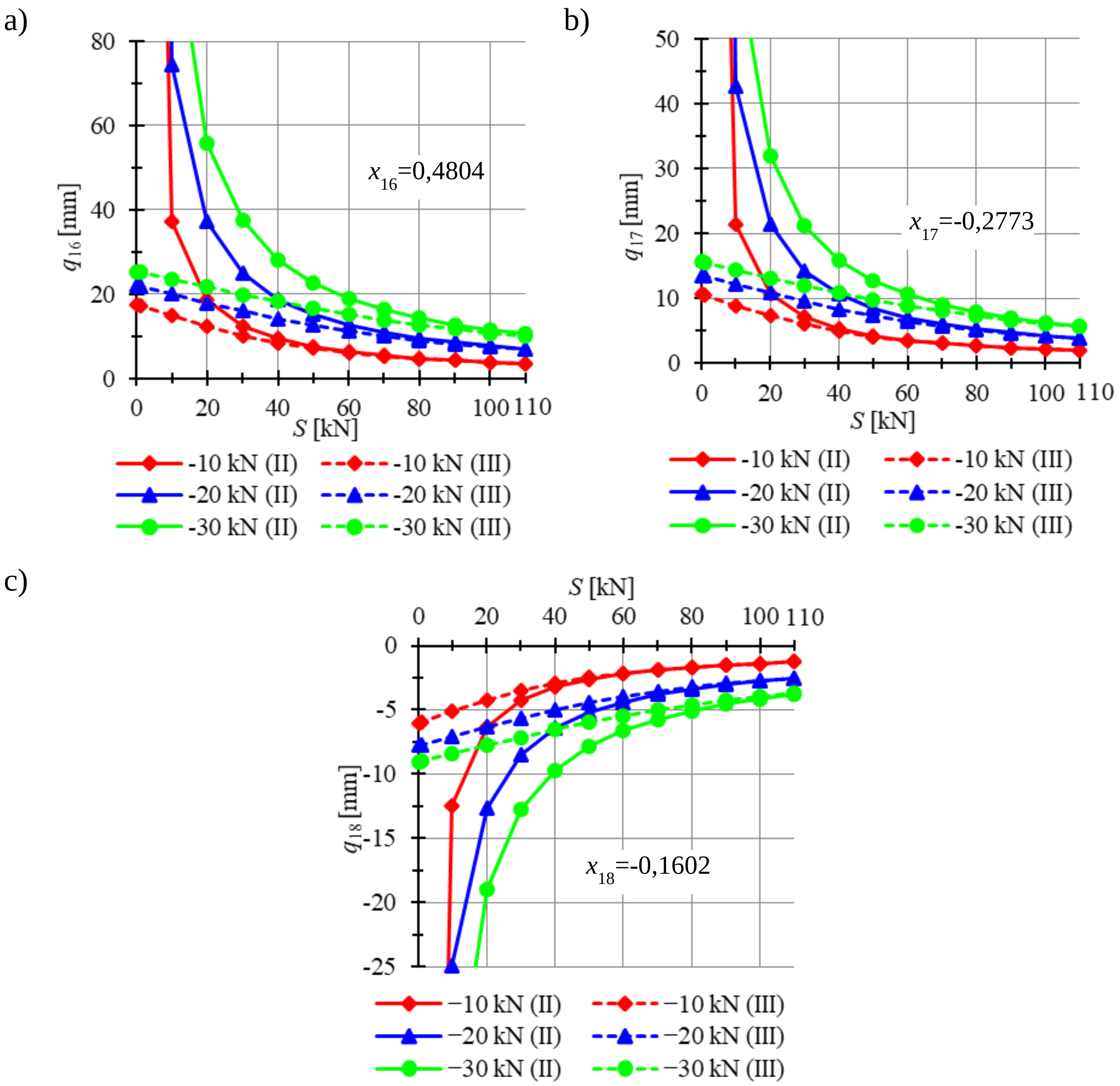
Przeanalizowano wpływ stanu samonaprężenia na:

- przemieszczenia węzła 6, tj. q_{16} (rys. 6.3a,), q_{17} (rys. 6.3b) i q_{18} (rys. 6.3c),
- globalny parametr sztywności GPS (rys. 6.4a),
- wytężenie elementów W_{max} (rys. 6.4b).

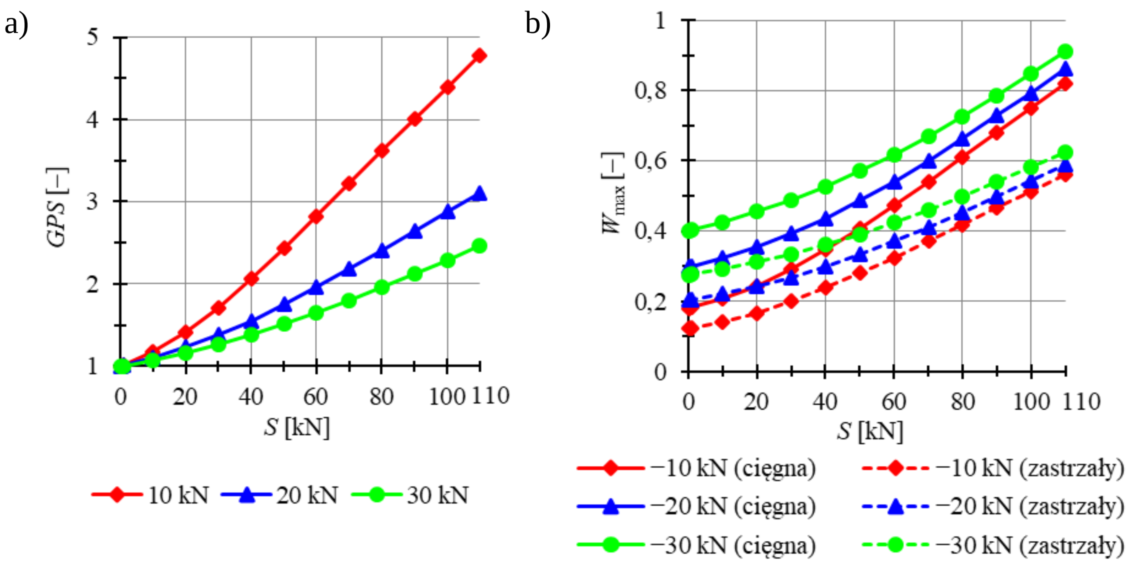
Tabela 6.3 zawiera wartości parametrów statycznych dla minimalnego i maksymalnego przyjętego poziomu stanu samonaprężenia.

Tabela 6.3. *Charakterystyki wytrzymałościowe modułu modified Simplex*

S [kN]	rodzaj elementu	$(P_{18}^1 = -10$ kN$)$			$(P_{18}^2 = -20$ kN$)$			$(P_{18}^3 = -30$ kN$)$		
		N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]	N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]	N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]
0,01	cięgna	19,8	0,180	1,0	32,8	0,298	1,0	44,2	0,400	1,0
	zastrzały	-25,0	0,123		-41,4	0,204		-55,8	0,274	
110	cięgna	90,3	0,819	4,8	94,9	0,861	3,1	100,4	0,911	2,5
	zastrzały	-114,3	0,610		-120,1	0,590		-127,1	0,624	



Rys. 6.3. Wpływ stanu samonaprężenia S na przemieszczenia: a) q_{16}, b) q_{17}, c) q_{18}



Rys. 6.4. Wpływ stanu samonaprężenia S na: a) globalny parametr sztywności GPS, b) wytężenie elementów W_{max} modułu *modified Simplex*

Wartości przemieszczeń uzyskane z analizy statycznej modułu *Simplex* korespondują z wartościami przemieszczeń uzyskanymi dla zidentyfikowanego mechanizmu (x_{16}, x_{17}, x_{18}). Różnice pomiędzy wartościami przemieszczeń uzyskanymi przy zastosowaniu teorii drugiego (II) i trzeciego (III) rzędu są znaczące dla małych wartości stanu samonaprężenia i maleją wraz ze wzrostem poziomu sił sprężających. Wpływ nieliniowości geometrycznej jest także bardziej zauważalny przy wzroście obciążeń zewnętrznych. Przykładowo, dla minimalnej wartości stanu samonaprężenia $S_{\min} = 0{,}01$ kN i najmniejszej rozważonej wartości obciążenia zewnętrznego $P_{18}^{1} = -10$ kN, błąd względny pomiędzy uzyskanymi wartościami przemieszczeń wynosi 2,1·10^4% dla przemieszczenia q_{16}, 2,0·10^4% dla przemieszczeń q_{17} i q_{18}, podczas gdy dla tego samego poziomu stanu samonaprężenia i najwyższej rozważanej wartości obciążenia zewnętrznego $P_{18}^{3} = -30$ kN uzyskano błąd względny równy 4,4·10^4% dla przemieszczenia q_{16}, 4,1·10^4% dla przemieszczeń q_{17} i q_{18}. Przyjmując maksymalną wartość stanu samonaprężenia $S_{\max} = 110$ kN oraz obciążenie zewnętrze równe $P_{18}^{1} = -10$ kN, błąd względny pomiędzy rezultatami obliczonymi przy zastosowaniu teorii drugiego i trzeciego rzędu wynosi 0,56% dla przemieszczenia q_{16}, 0,59% dla przemieszczenia q_{17} oraz 0,06% dla przemieszczenia q_{18},. Dla maksymalnej wartości stanu samonaprężenia i obciążenia zewnętrznego $P_{18}^{3} = -30$ kN uzyskany błąd względny wynosi 5,26% dla przemieszczenia q_{16}, 2,46% dla przemieszczenia q_{17} oraz 3,46% dla przemieszczenia q_{18}.

Wartość obciążenia wpływa również na sztywność struktury. Im mniejsza wartość obciążenia, tym większy wpływ na sztywność konstrukcji ma poziom sił stanu samonaprężenia. Przyrost poziomu stanu samonaprężenia o 1 kN powoduje średni przyrost parametru GPS o 0,0351 dla $P_{18}^{1} = -10$ kN, 0,0193 dla $P_{18}^{2} = -20$ kN i 0,0132 dla $P_{18}^{3} = -30$ kN.

W przypadku wytężenia elementów struktury, przy przyjętych parametrach materiałowych bardziej wytężone są cięgna. Różnica pomiędzy maksymalnym wytężeniem cięgien i zastrzałów rośnie wraz z przyrostem poziomu sił stanu samonaprężenia. Dla minimalnego poziomu stanu samonaprężenia $S_{\mathrm{min}} = 0{,}01$ kN różnica pomiędzy wytężeniem tych elementów wynosi 5,6 punktów procentowych dla $P_{18}^{1} = -10$ kN i 12,6 punktów procentowych dla $P_{18}^{3} = -30$ kN, natomiast przy maksymalnej wartości sił stanu samonaprężenia $S_{\mathrm{max}} = 110$ kN różnica ta wynosi 25,8 punktów procentowych dla $P_{18}^{1} = -10$ kN i 28,6 punktów procentowych dla $P_{18}^{3} = -30$ kN.

6.2.3. Moduł *Quartex*

Kolejną rozpatrywaną strukturą jest moduł *Quartex* charakteryzujący się jednym stanem samonaprężenia $\mathbf{y}_{16}$ i jednym mechanizmem infinitezymalnym $\mathbf{x}_{16}$ (rozdział 5.2.3). Długość zastrzałów konstrukcji wynosi $L = 1{,}65$ m, a ich nośność – $N_{b,Rd} = 183{,}7$ kN. Natomiast maksymalna siła sprężenia w cięgnach wynosi $N_{max} = 0{,}691 \cdot S$.

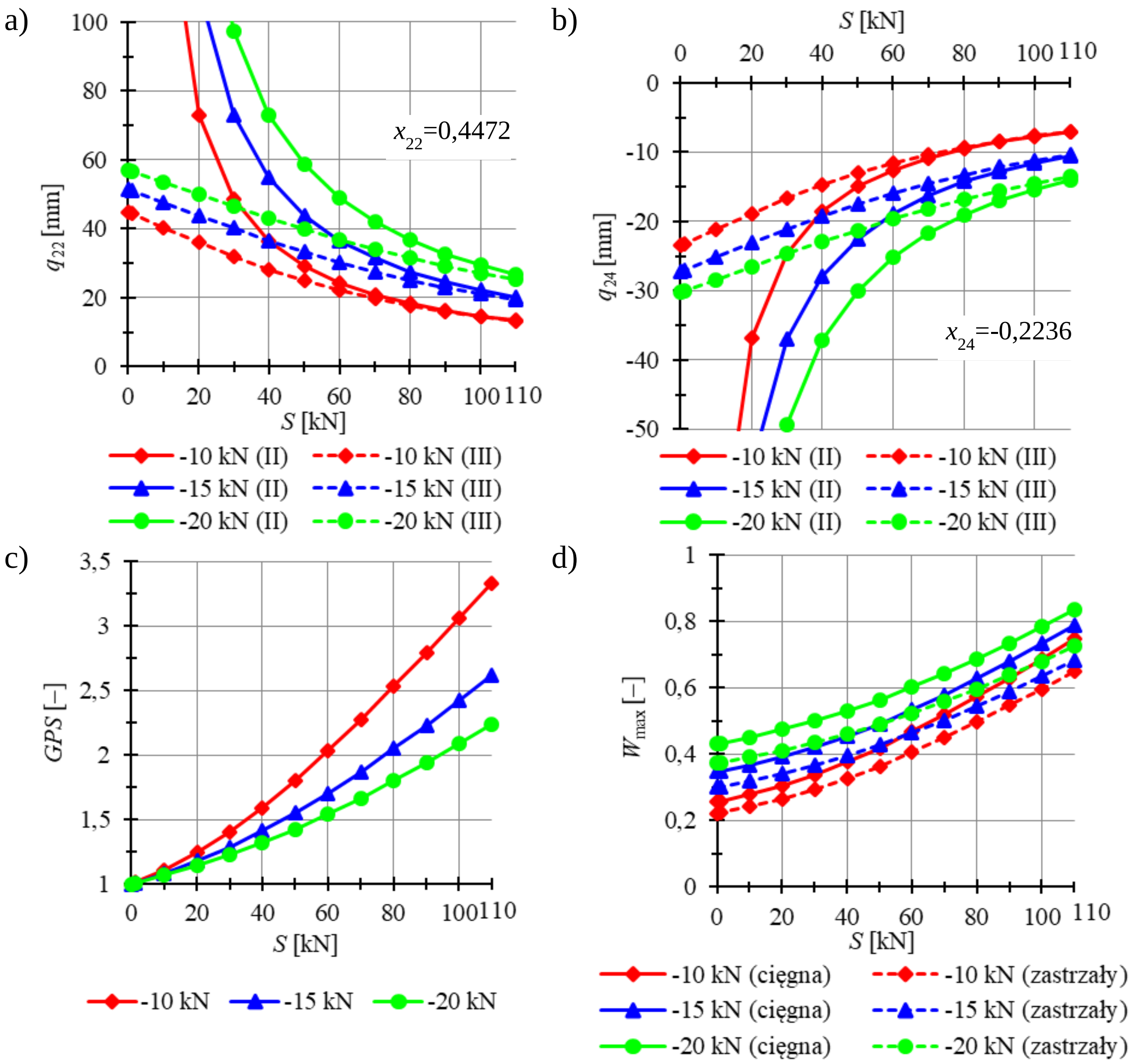
Minimalny i maksymalny stan stanu samonaprężenia przyjęto odpowiednio na poziomie: $S_{min} = 0{,}01$ kN oraz $S_{max} = 110$ kN (wytężenie cięgna na poziomie 83,5%). Rozpatrzono trzy przypadki obciążenia siłą skupioną, przyłożoną na kierunku z w węźle 8: $P_{24}^{1} = -10$ kN, $P_{24}^{2} = -15$ kN i $P_{24}^{3} = -20$ kN. Analizę ilościową przeprowadzono w przypadku konstrukcji podpartych w sposób zapewniający brak możliwości wystąpienia ruchów ciała sztywnego (odebrane stopnie swobody: $q_1, q_3, q_5, q_6, q_7, q_9, q_{11}, q_{12}$). Przeanalizowano wpływ stanu samonaprężenia na:

- niezerowe przemieszczenia węzła 8, tj. q_{22} (rys. 6.5a,) i q_{24} (rys. 6.5b),
- globalny parametr sztywności GPS (rys. 6.5c),
- wytężenie elementów W_{max} (rys. 6.5d).

Tabela 6.4 zawiera wartości parametrów statycznych dla minimalnego i maksymalnego przyjętego poziomu stanu samonaprężenia.

Tabela 6.4. *Charakterystyki wytrzymałościowe modułu Quartex*

<table>
<tr><th rowspan="2">S [kN]</th><th rowspan="2">rodzaj elementu</th><th colspan="3">$(P_{24}^1 = -10$ kN$)$</th><th colspan="3">$(P_{24}^2 = -15$ kN$)$</th><th colspan="3">$(P_{24}^3 = -20$ kN$)$</th></tr>
<tr><th>N_{max} [kN]</th><th>W_{max} [−]</th><th>GPS [−]</th><th>N_{max} [kN]</th><th>W_{max} [−]</th><th>GPS [−]</th><th>N_{max} [kN]</th><th>W_{max} [−]</th><th>GPS [−]</th></tr>
<tr><td rowspan="2">0,01</td><td>cięgna</td><td>28,3</td><td>0,257</td><td rowspan="2">1,0</td><td>38,2</td><td>0,347</td><td rowspan="2">1,0</td><td>47,4</td><td>0,430</td><td rowspan="2">1,0</td></tr>
<tr><td>zastrzały</td><td>-40,9</td><td>0,223</td><td>-55,3</td><td>0,300</td><td>-68,6</td><td>0,373</td></tr>
<tr><td rowspan="2">110</td><td>cięgna</td><td>82,3</td><td>0,747</td><td rowspan="2">3,3</td><td>86,9</td><td>0,788</td><td rowspan="2">2,6</td><td>92,1</td><td>0,835</td><td rowspan="2">2,2</td></tr>
<tr><td>zastrzały</td><td>-119,2</td><td>0,648</td><td>-125,8</td><td>0,684</td><td>-133,4</td><td>0,726</td></tr>
</table>



Rys. 6.5. Wpływ stanu samonaprężenia S na: a) przemieszczenie q_{22}, b) przemieszczenie q_{24}, c) globalny parametr sztywności GPS, d) wytężenie elementów W_{max}

Wartości przemieszczeń uzyskane z analizy statycznej pojedynczego modułu *modified Quartex* korespondują z wartościami przemieszczeń uzyskanymi dla zidentyfikowanego mechanizmu (x_{22}, x_{24}). Wartość przemieszczenia węzła

8 w kierunku x (q_{22}) jest dwukrotnie większa od wartości przemieszczenia tego węzła w kierunku y (q_{24}). Zależność ta jest stała dla wszystkich poziomów stanu samonaprężenia. Różnice pomiędzy wartościami przemieszczeń uzyskanymi przy zastosowaniu teorii drugiego (II) i trzeciego (III) rzędu są znaczące dla małych wartości stanu samonaprężenia i maleją wraz ze wzrostem poziomu sił sprężających. Wpływ nieliniowości geometrycznej jest także bardziej zauważalny przy wzroście obciążeń zewnętrznych. Przykładowo, dla minimalnej wartości stanu samonaprężenia $S_{\min} = 0{,}01$ kN i najmniejszej rozważonej wartości obciążenia zewnętrznego $P_{24}^{1} = -10$ kN, błąd względny pomiędzy uzyskanymi wartościami przemieszczeń wynosi $3{,}2 \cdot 10^{5}$% dla przemieszczenia q_{22} oraz $3{,}1 \cdot 10^{5}$% dla przemieszczenia q_{24}, podczas gdy dla tego samego poziomu stanu samonaprężenia i najwyższej rozważanej wartości obciążenia zewnętrznego $P_{24}^{3} = -20$ kN uzyskano błąd względny równy $5{,}1 \cdot 10^{5}$% dla przemieszczenia q_{22} oraz $4{,}8 \cdot 10^{5}$% dla przemieszczenia q_{24}. Przyjmując maksymalną wartość stanu samonaprężenia $S_{\max} = 110$ kN oraz obciążenie zewnętrze równe $P_{24}^{1} = -10$ kN, błąd względny pomiędzy rezultatami obliczonymi przy zastosowaniu teorii drugiego i trzeciego rzędu wynosi 1,06% dla przemieszczenia q_{22} i 0,06% dla przemieszczenia q_{24}. Dla maksymalnej wartości stanu samonaprężenia i obciążenia zewnętrznego $P_{24}^{3} = -20$ kN uzyskany błąd względny wynosi 6,30% dla przemieszczenia q_{22} and 4,08% dla przemieszczenia q_{24}.

Wartość obciążenia wpływa również na sztywność struktury. Im mniejsza wartość obciążenia, tym większy wpływ na sztywność konstrukcji ma poziom sił stanu samonaprężenia. Przyrost poziomu stanu samonaprężenia o 1 kN powoduje średni przyrost parametru GPS o 0,0212 dla $P_{24}^{1} = -10$ kN, 0,0146 dla $P_{24}^{2} = -15$ kN i 0,0111 dla $P_{24}^{3} = -20$ kN.

W przypadku wytężenia elementów struktury, przy przyjętych parametrach materiałowych bardziej wytężone są cięgna. Różnica pomiędzy maksymalnym wytężeniem cięgien i zastrzałów rośnie wraz z przyrostem poziomu sił stanu samonaprężenia. Dla minimalnego poziomu stanu samonaprężenia $S_{\min} = 0{,}01$ kN różnica pomiędzy wytężeniem tych elementów wynosi 3,4 punktów procentowych dla $P_{24}^{1} = -10$ kN i 5,7 punktów procentowych dla $P_{24}^{3} = -20$ kN, natomiast przy maksymalnej wartości sił stanu samonaprężenia $S_{\max} = 110$ kN różnica ta wynosi 9,8 punktów procentowych dla $P_{24}^{1} = -10$ kN i 11,0 punktów procentowych dla $P_{24}^{3} = -20$ kN.

6.2.4. Moduł *modified Quartex*

Kolejną rozpatrywaną strukturą jest moduł *modified Quartex* charakteryzujący się jednym stanem samonaprężenia $\mathbf{y}_{16}$ i jednym mechanizmem infinitezymalnym $\mathbf{x}_{16}$ (rozdział 5.2.4). Długość zastrzałów konstrukcji wynosi $L = 1{,}5$ m, a ich nośność – $N_{b,Rd} = 193{,}9$ kN. Maksymalna siła sprężenia w cięgnach wynosi $N_{max} = 0{,}745 \cdot S$.

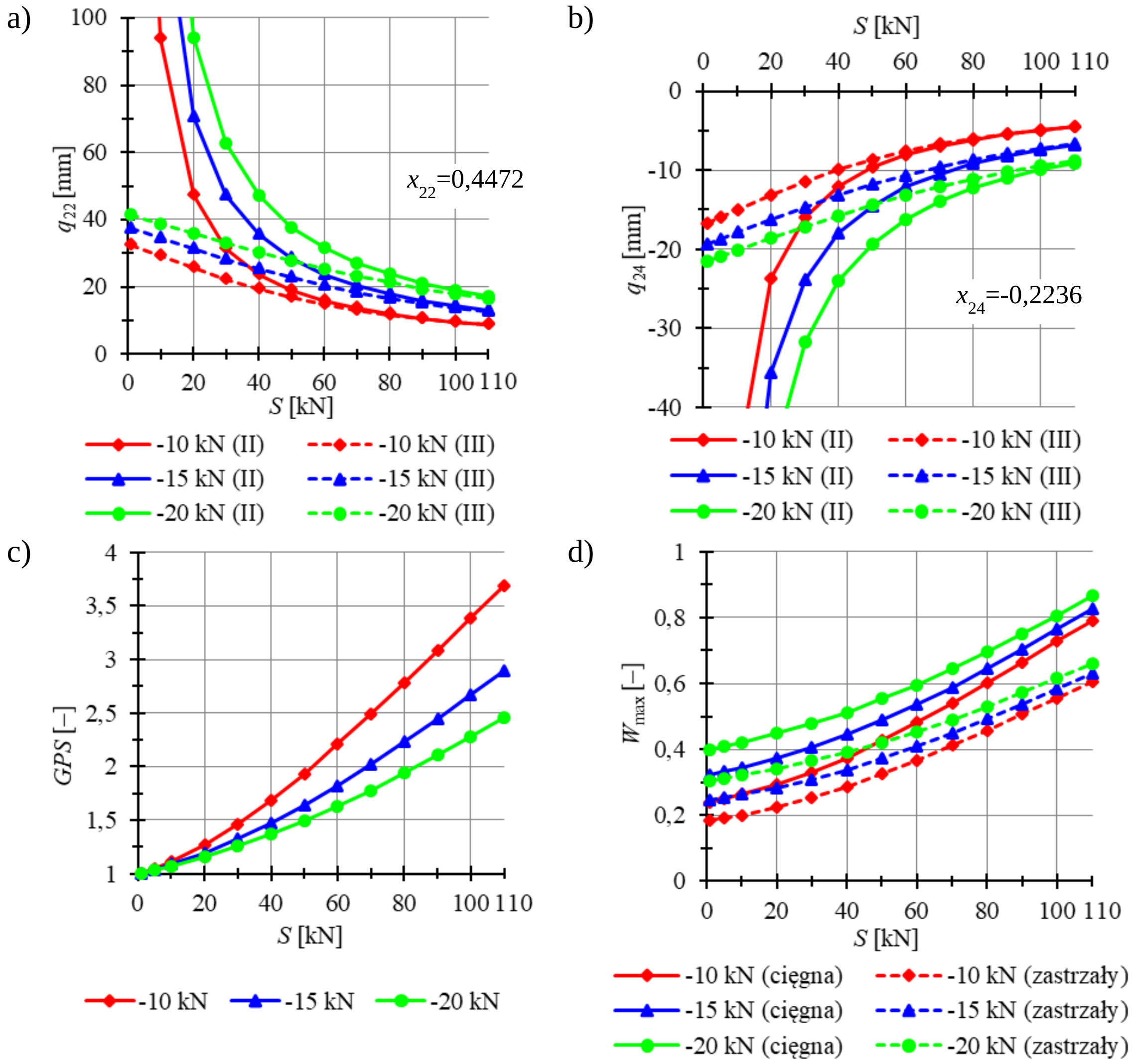
Minimalny i maksymalny stan stanu samonaprężenia przyjęto odpowiednio na poziomie: $S_{min} = 0{,}01$ kN oraz $S_{max} = 110$ kN (wytężenie cięgna na poziomie 86,5%). Rozpatrzono trzy przypadki obciążenia siłą skupioną, przyłożoną na kierunku z w węźle 8: $P_{24}^{1} = -10$ kN, $P_{24}^{2} = -15$ kN i $P_{24}^{3} = -20$ kN. Analizę ilościową przeprowadzono w przypadku konstrukcji podpartych w sposób zapewniający brak możliwości wystąpienia ruchów ciała sztywnego (odebrane stopnie swobody: q_1, q_3, q_8, q_9, q_{13}, q_{15}, q_{20}, q_{21}). Przeanalizowano wpływ stanu samonaprężenia na:

- niezerowe przemieszczenia węzła 8, tj. q_{22} (rys. 6.6a,) i q_{24} (rys. 6.6b),
- globalny parametr sztywności GPS (rys. 6.6c),
- wytężenie elementów W_{max} (rys. 6.6d).

Tabela 6.5 zawiera wartości parametrów statycznych dla minimalnego i maksymalnego przyjętego poziomu stanu samonaprężenia.

Tabela 6.5. *Charakterystyki wytrzymałościowe modułu modified Quartex*

S [kN]	rodzaj elementu	$(P_{24}^{1} = -10$ kN)			$(P_{24}^{2} = -15$ kN)			$(P_{24}^{3} = -20$ kN)		
		N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]	N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]	N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]
0,01	cięgna	26,5	0,241	1,0	35,7	0,324	1,0	44,1	0,400	1,0
	zastrzały	-35,6	0,184		-47,8	0,246		59,1	0,305	
110	cięgna	87,3	0,792	3,7	91,1	0,826	2,9	95,3	0,865	2,5
	zastrzały	-117,2	0,604		-122,2	0,630		-128,0	0,660	



Rys. 6.6. Wpływ stanu samonaprężenia S na: a) przemieszczenie q_{22}, b) przemieszczenie q_{24}, c) globalny parametr sztywności GPS, d) wytężenie elementów W_{max}

Wartości przemieszczeń uzyskane z analizy statycznej pojedynczego modułu *modified Quartex* korespondują z wartościami przemieszczeń uzyskanymi dla zidentyfikowanego mechanizmu (x_{22}, x_{24}). Wartość przemieszczenia węzła 8 w kierunku x (q_{22}) jest dwukrotnie większa od wartości przemieszczenia tego węzła w kierunku y (q_{24}). Zależność ta jest stała dla wszystkich poziomów stanu samonaprężenia. Różnice pomiędzy wartościami przemieszczeń uzyskanymi przy zastosowaniu teorii drugiego (II) i trzeciego (III) rzędu są znaczące dla małych wartości stanu samonaprężenia i maleją wraz ze wzrostem poziomu sił sprężających. Wpływ nieliniowości geometrycznej jest także bardziej zauważalny przy wzroście obciążeń zewnętrznych. Przykładowo, dla minimalnej wartości stanu samonaprężenia

$S_{\min} = 0{,}01$ kN i najmniejszej rozważonej wartości obciążenia zewnętrznego $P_{24}^1 = -10$ kN, błąd względny pomiędzy uzyskanymi wartościami przemieszczeń wynosi $2{,}9 \cdot 10^5\%$ dla przemieszczenia q_{22} oraz $2{,}8 \cdot 10^5\%$ dla przemieszczenia q_{24}, podczas gdy dla tego samego poziomu stanu samonaprężenia i najwyższej rozważanej wartości obciążenia zewnętrznego $P_{24}^3 = -20$ kN uzyskano błąd względny równy $4{,}5 \cdot 10^5\%$ dla przemieszczenia q_{22} oraz $4{,}3 \cdot 10^5\%$ dla przemieszczenia q_{24}. Przyjmując maksymalną wartość stanu samonaprężenia $S_{\max} = 110$ kN oraz obciążenie zewnętrze równe $P_{24}^1 = -10$ kN, błąd względny pomiędzy rezultatami obliczonymi przy zastosowaniu teorii drugiego i trzeciego rzędu wynosi 0,71% dla przemieszczenia q_{22} i 0,22% dla przemieszczenia q_{24}. Dla maksymalnej wartości stanu samonaprężenia i obciążenia zewnętrznego $P_{24}^3 = -20$ kN uzyskany błąd względny wynosi 4,45% dla przemieszczenia q_{22} and 3,34% dla przemieszczenia q_{24}.

Wartość obciążenia wpływa również na sztywność struktury. Im mniejsza wartość obciążenia, tym większy wpływ na sztywność konstrukcji ma poziom sił stanu samonaprężenia. Przyrost poziomu stanu samonaprężenia o 1 kN powoduje średni przyrost parametru GPS o 0,025 dla $P_{24}^1 = -10$ kN, 0,0173 dla $P_{24}^2 = -15$ kN i 0,0132 dla $P_{24}^3 = -20$ kN.

W przypadku wytężenia elementów struktury, przy przyjętych parametrach materiałowych bardziej wytężone są cięgna. Różnica pomiędzy maksymalnym wytężeniem cięgien i zastrzałów rośnie wraz z przyrostem poziomu sił stanu samonaprężenia. Dla minimalnego poziomu stanu samonaprężenia $S_{\min} = 0{,}01$ kN różnica pomiędzy wytężeniem tych elementów wynosi 5,7 punktów procentowych dla $P_{24}^1 = -10$ kN i 9,5 punktów procentowych dla $P_{24}^3 = -20$ kN, natomiast przy maksymalnej wartości sił stanu samonaprężenia $S_{\max} = 110$ kN różnica ta wynosi 18,8 punktów procentowych dla $P_{24}^1 = -10$ kN i 20,5 punktów procentowych dla $P_{24}^3 = -20$ kN.

6.2.5. Moduł *expanded Octahedron*

Kolejną rozpatrywaną strukturą jest *expanded Octahedron* charakteryzujący się jednym stanem samonaprężenia $\mathbf{y}_{30}$ i jednym mechanizmem infinitezymalnym $\mathbf{x}_{30}$ (rozdział 5.2.5). Długość zastrzałów konstrukcji wynosi $L = 1{,}0$ m, a ich nośność –

$N_{b,Rd} = 218{,}4$ kN. Natomiast maksymalna siła sprężenia w cięgnach wynosi $N_{Q,max} = 0{,}408 \cdot S$.

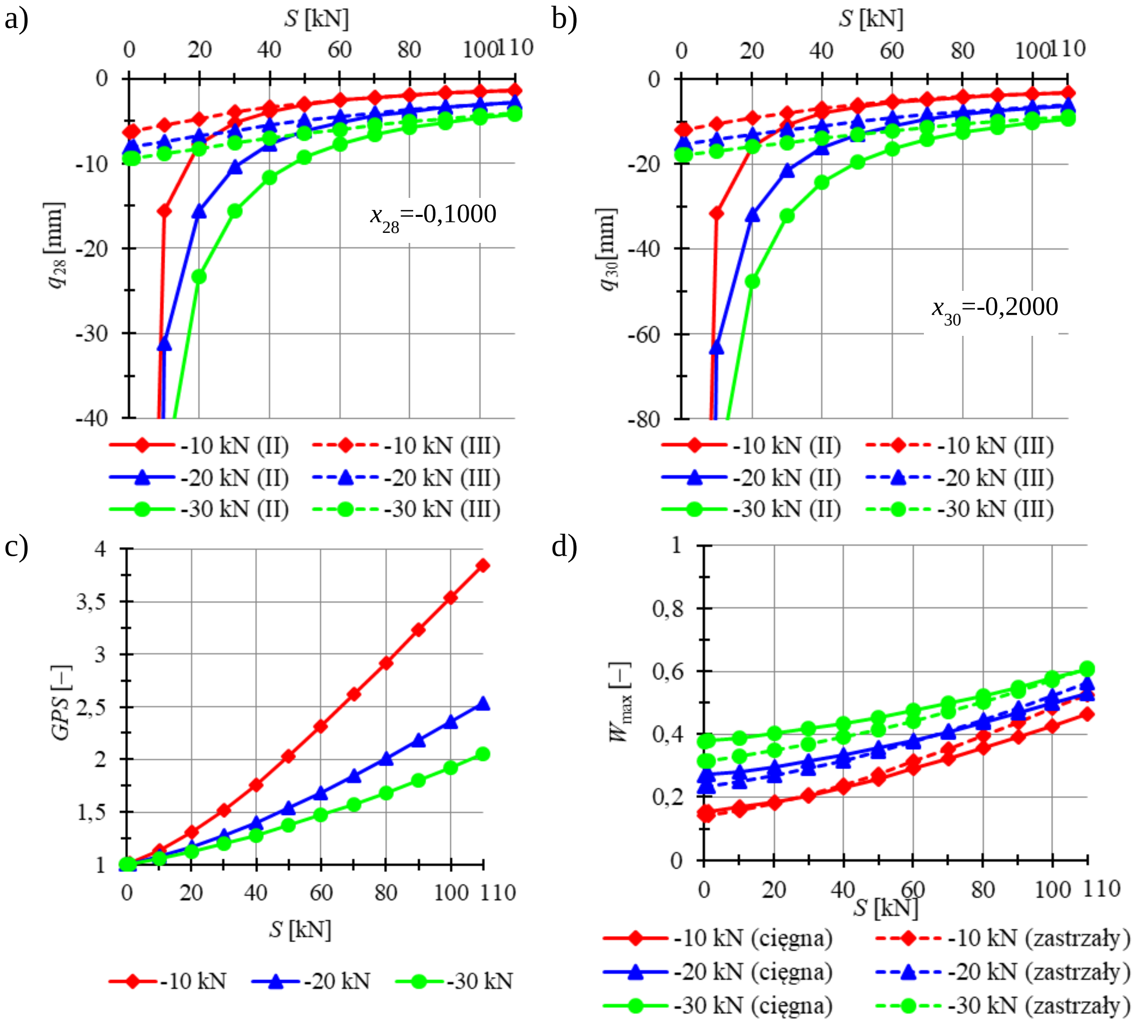
Minimalny i maksymalny stan stanu samonaprężenia przyjęto odpowiednio na poziomie: $S_{min} = 0{,}01$ kN oraz $S_{max} = 110$ kN (wytężenie cięgna na poziomie 60,7%). Rozpatrzono trzy przypadki obciążenia siłą skupioną, przyłożoną na kierunku z w węźle 8: $P_{30}^{1} = -10$ kN, $P_{30}^{2} = -20$ kN i $P_{30}^{3} = -30$ kN. Analizę ilościową przeprowadzono w przypadku konstrukcji podpartych w sposób zapewniający brak możliwości wystąpienia ruchów ciała sztywnego (odebrane stopnie swobody: $q_{14}, q_{15}, q_{16}, q_{18}, q_{23}, q_{24}$). Przeanalizowano wpływ stanu samonaprężenia na:

- niezerowe przemieszczenia węzła 8, tj. q_{22} (rys. 6.7a,) i q_{24} (rys. 6.7b),
- globalny parametr sztywności GPS (rys. 6.7c),
- wytężenie elementów W_{max} (rys. 6.7d).

Tabela 6.6 zawiera wartości parametrów statycznych dla minimalnego i maksymalnego przyjętego poziomu stanu samonaprężenia.

Tabela 6.6. *Charakterystyki wytrzymałościowe modułu expanded Octahedron*

S [kN]	**rodzaj elementu**	($P_{30}^{1} = -10$ kN) N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]	($P_{30}^{2} = -20$ kN) N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]	($P_{30}^{3} = -30$ kN) N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]
0,01	cięgna	17,0	0,154	1,0	29,7	0,270	1,0	41,6	0,377	1,0
	zastrzały	-31,0	0,142		-51,0	0,234		-68,6	0,314	
110	cięgna	51,0	0,462	3,8	58,5	0,530	2,5	66,9	0,607	2,1
	zastrzały	-115,2	0,527		-123,2	0,564		-133,2	0,609	



Rys. 6.7. Wpływ stanu samonaprężenia S na: a) przemieszczenie q_{28}, b) przemieszczenie q_{30}, c) globalny parametr sztywności GPS, d) wytężenie elementów W_{max}

Wartości przemieszczeń uzyskane z analizy statycznej pojedynczego modułu *expanded Octahedron* korespondują z wartościami przemieszczeń uzyskanymi dla zidentyfikowanego mechanizmu (x_{28}, x_{30}). Wartość przemieszczenia węzła 10 w kierunku x (q_{28}) jest dwukrotnie większa od wartości przemieszczenia tego węzła w kierunku z (q_{30}). Zależność ta jest stała dla wszystkich poziomów stanu samonaprężenia. Różnice pomiędzy wartościami przemieszczeń uzyskanymi przy zastosowaniu teorii drugiego (II) i trzeciego (III) rzędu są znaczące dla małych wartości stanu samonaprężenia i maleją wraz ze wzrostem poziomu sił sprężających. Wpływ nieliniowości geometrycznej jest także bardziej zauważalny przy wzroście obciążeń zewnętrznych. Przykładowo, dla minimalnej wartości stanu samonaprężenia

$S_{\min} = 0{,}01$ kN i najmniejszej rozważonej wartości obciążenia zewnętrznego $P_{30}^{1} = -10$ kN, błąd względny pomiędzy uzyskanymi wartościami przemieszczeń wynosi $2{,}5{\cdot}10^{5}\%$ dla przemieszczenia q_{28} oraz $2{,}6{\cdot}10^{5}\%$ dla przemieszczenia q_{30}, podczas gdy dla tego samego poziomu stanu samonaprężenia i najwyższej rozważanej wartości obciążenia zewnętrznego $P_{30}^{3} = -30$ kN uzyskano błąd względny równy $5{,}0{\cdot}10^{5}\%$ dla przemieszczenia q_{28} oraz $5{,}3{\cdot}10^{5}\%$ dla przemieszczenia q_{30}. Przyjmując maksymalną wartość stanu samonaprężenia $S_{\max} = 110$ kN oraz obciążenie zewnętrze równe $P_{30}^{1} = -10$ kN, błąd względny pomiędzy rezultatami obliczonymi przy zastosowaniu teorii drugiego i trzeciego rzędu wynosi 1,18% dla przemieszczenia q_{28} i 0,71% dla przemieszczenia q_{30}. Dla maksymalnej wartości stanu samonaprężenia i obciążenia zewnętrznego $P_{30}^{3} = -30$ kN uzyskany błąd względny wynosi 3,47% dla przemieszczenia q_{28} and 8,01% dla przemieszczenia q_{30}.

Wartość obciążenia wpływa również na sztywność struktury. Im mniejsza wartość obciążenia, tym większy wpływ na sztywność konstrukcji ma poziom sił stanu samonaprężenia. Przyrost poziomu stanu samonaprężenia o 1 kN powoduje średni przyrost parametru GPS o 0,0261 dla $P_{30}^{1} = -10$ kN, 0,0139 dla $P_{30}^{2} = -20$ kN i 0,0094 dla $P_{30}^{3} = -30$ kN.

W przypadku wytężenia elementów struktury, przy przyjętych parametrach materiałowych dla niższych poziomów stanu samonaprężenia nieznacznie bardziej wytężone są cięgna. Dla minimalnego poziomu stanu samonaprężenia $S_{\min} = 0{,}01$ kN cięgna są bardziej wytężone od zastrzałów o 1,2 punktów procentowych dla $P_{30}^{1} = -10$ kN i o 6,3 punktów procentowych dla $P_{30}^{3} = -30$ kN. Wraz ze wzrostem stanu samonaprężenia bardziej wytężone stają się zastrzały i przy maksymalnej wartości sił stanu samonaprężenia $S_{\max} = 110$ kN zastrzały są bardziej wytężone od cięgien o 6,4 punktów procentowych dla $P_{30}^{1} = -10$ kN i o 0,3 punktów procentowych
dla $P_{30}^{3} = -30$ kN.

6.3. Struktury zbudowane z modułu *Simplex*

Pierwszą rozpatrywaną grupą konstrukcji są struktury zbudowane z modułu *Simplex*. Długość zastrzałów dla struktur zbudowanych z tego modułu wynosi $L = 1{,}5$ m, a ich nośność – $N_{b,Rd} = 193{,}9$ kN. Maksymalna siła sprężenia w cięgnach wynosi

$N_{max} = 0{,}697 \cdot S$. Rozpatrzone zostaną płyty składające się z sześciu, dziesięciu, czternastu i dwudziestu czterech modułów. Minimalny stan samonaprężenia został przyjęty tak, aby zapewnić właściwą identyfikację elementów struktury i różni się w zależności od przyjętego schematu statycznego, natomiast maksymalny stan samonaprężenia założono równy $S_{\max} = 140$ kN, odpowiadający maksymalnemu wytężeniu cięgien na poziomie 97,3%.

6.3.1. 6-modułowa płyta *Simplex*

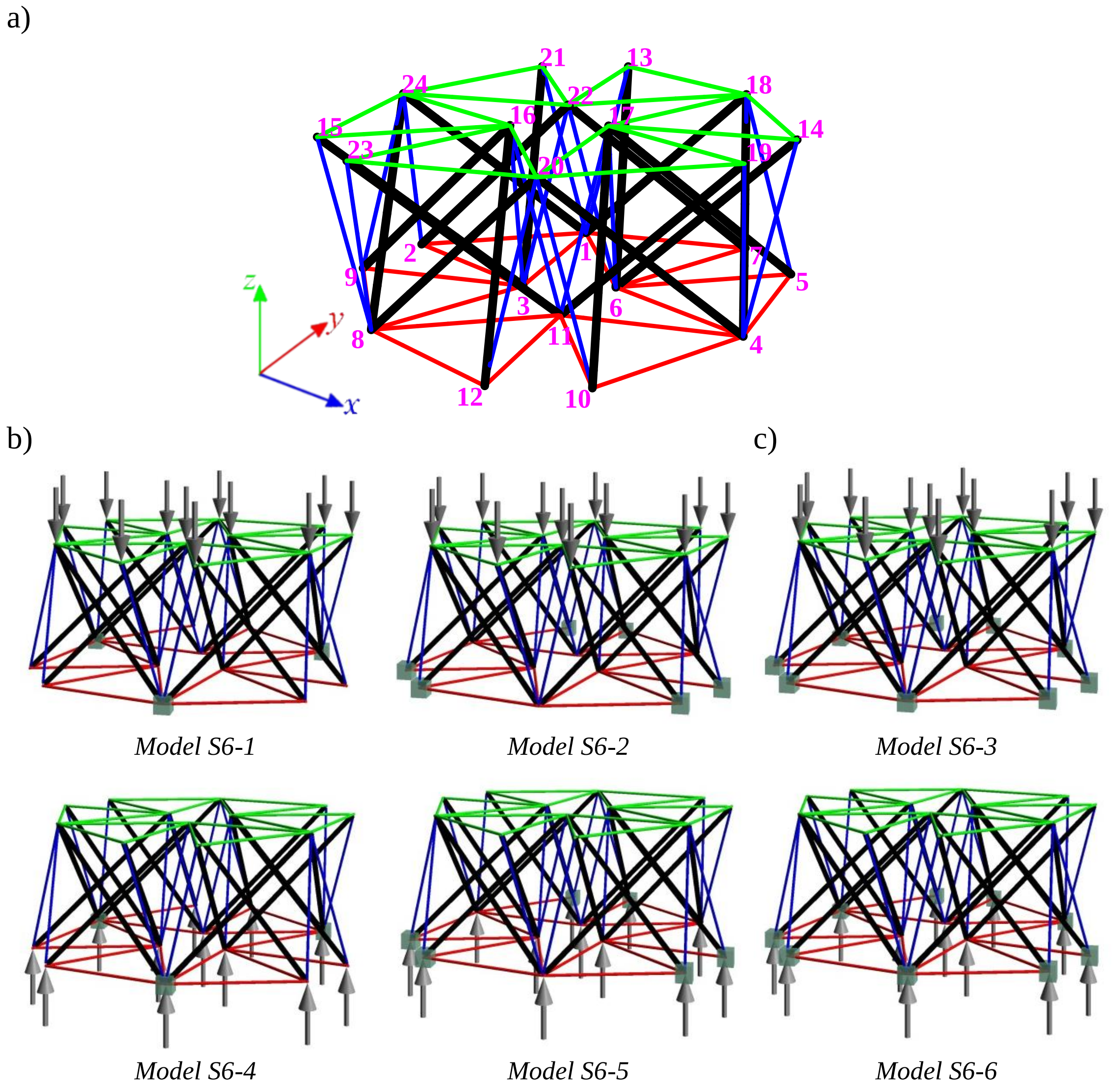
Pierwszymi w kolejności rozważanymi strukturami zbudowanymi z modułów *Simplex* są płyty 6-modułowe (rys. 6.8). Rozpatrzono 3 modele różniące się sposobem podparcia. Wszystkie analizowane struktury są kratownicami (***K***), zastrzały znajdują się wewnątrz układu elementów rozciąganych (***W***) o pomijalnie małej sztywności na ściskanie (***C***). We wszystkich rozpatrywanych 3 modelach wystąpiły stany samonaprężenia (***S***), których liczba zależy od liczby zablokowanych stopni swobody. Otrzymane stany samonaprężenia nie definiują jednoznacznie elementów konstrukcji, dopiero uwzględnienie stanu samonaprężenia pojedynczego modułu pozwoliło zidentyfikować rodzaje elementów. W związku z powyższym, modele S6-1, S6-2, charakteryzujące się występowaniem mechanizmu infinitezymalnego (***M***), zaliczono do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 1, natomiast model S6-3 ze względu na brak mechanizmu – do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 2. Analizę jakościową płyt 6-modułowych zbudowanych z modułów *Simplex* opisano w 5.3.1.

Rozważano dwa warianty obciążenia. W pierwszym wariancie modele zostały obciążone siłami $P_z = -1$ kN działającym w kierunku osi z, przyłożonymi do górnych węzłów konstrukcji, tj. węzłów 14-24, natomiast w drugim wariancie modele zostały obciążone siłami $P_z = 1$ kN działającym w kierunku osi z, przyłożonymi do dolnych węzłów konstrukcji, tj. węzłów 1-13.

Przeanalizowano wpływ stanu samonaprężenia na:

- minimalne przemieszczenia węzłów w kierunku x (rys. 6.9a), y (rys. 6.9b) i z (rys. 6.9c),
- globalny parametr sztywności GPS (rys. 6.10a),
- wytężenie elementów W_{max} (rys. 6.10b).

W tabelach 6.7 i 6.8 zawarto wybrane parametry statyczne otrzymane dla minimalnego i maksymalnego poziomu stanu samonaprężenia.



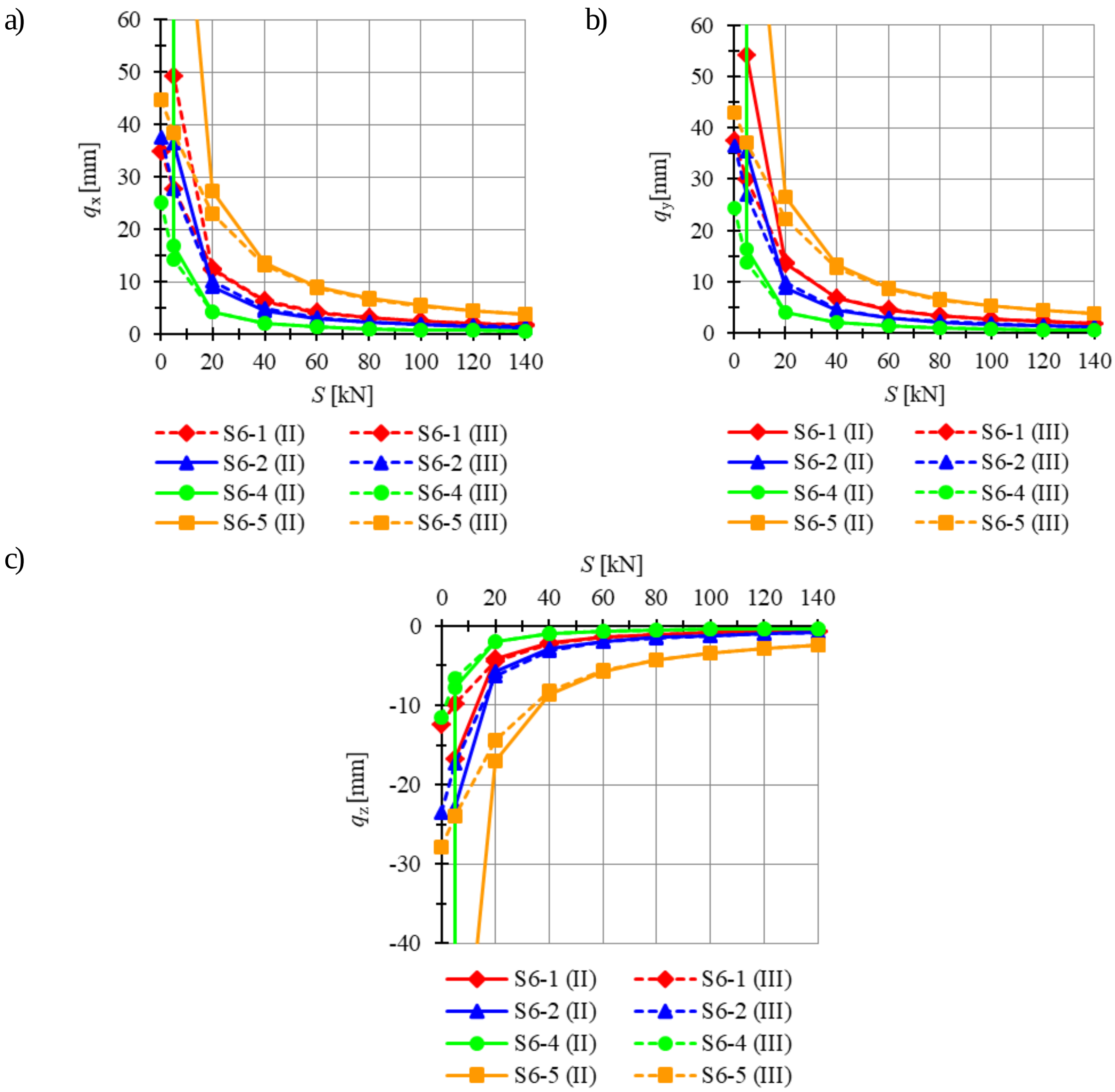
Rys. 6.8. a) Geometria 6-modułowej płyty *Simplex*, b) modele konstrukcji o cechach tensegrity klasy 1, c) modele o cechach tensegrity klasy 2

Tabela 6.7. *Charakterystyki wytrzymałościowe dla modeli S6-1 i S6-4*

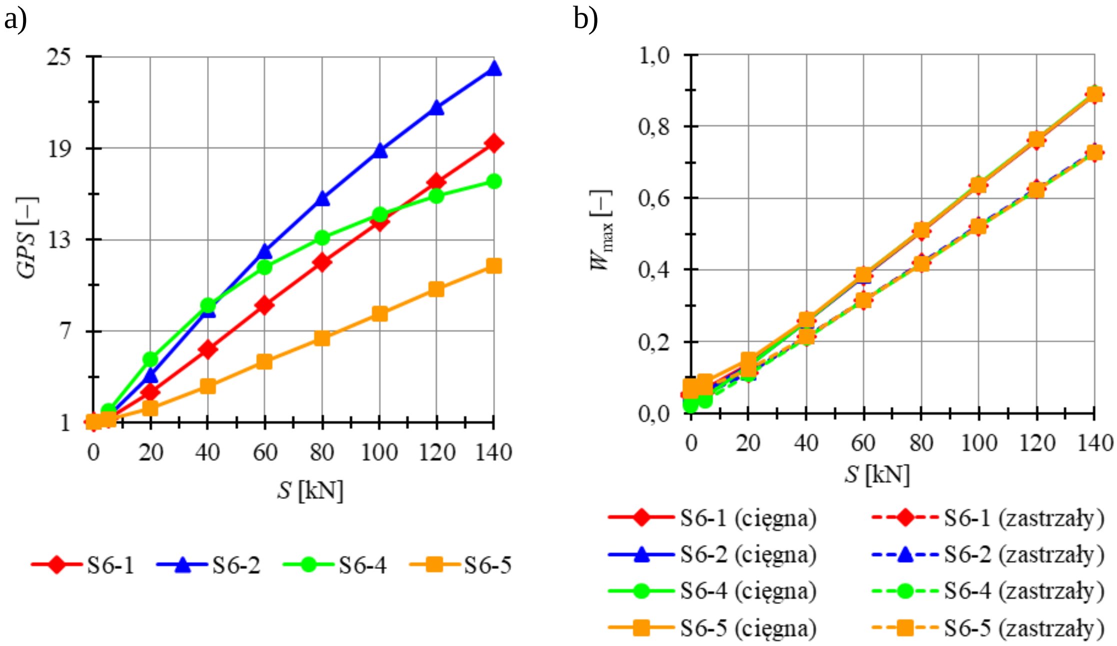
S [kN]	**typ elementu**	*Model S6-1* ($S_{\min} = 0{,}01$ kN)			*Model S6-4* ($S_{\min} = 0{,}01$ kN)		
		N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]	N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]
$\boldsymbol{S_{\min}}$	cięgna	6,2	0,056	1,0	3,1	0,028	1,0
	zastrzały	-9,6	0,050		-4,4	0,023	
140	cięgna	97,8	0,888	19,3	98,2	0,891	16,9
	zastrzały	-141,1	0,728		-140,9	0,727	

Tabela 6.8. *Charakterystyki wytrzymałościowe dla modeli S6-2 i S6-5*

S [kN]	typ elementu	Model S6-2 ($S_{\min} = 0{,}01$kN)			Model S6-5 ($S_{\min} = 0{,}01$ kN)		
		N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]	N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]
$S_{\min}$	cięgna	5,7	0,052	1,0	8,4	0,076	1,0
	zastrzały	-8,9	0,046		-12,1	0,062	
140	cięgna	98,0	0,889	24,3	98,1	0,890	11,3
	zastrzały	-141,4	0,729		-140,7	0,726	



Rys. 6.9. Wpływ stanu samonaprężenia na przemieszczenia: a) q_x, b) q_y, c) q_z modeli S6-1, S6-2, S6-5 i S6-6



Rys. 6.10. Wpływ stanu samonaprężenia S na: a) globalny parametr sztywności GPS, b) wytężenie elementów W_{max} modeli S6-1, S6-2, S6-5 i S6-6

Dla wszystkich rozpatrywanych modeli wartość minimalnego poziomu stanu samonaprężenia wynosi $S_{\min} = 0{,}01$ kN. Najmniejsze wartości przemieszczeń uzyskano dla modelu S6-4, natomiast największe – dla modelu S6-5. Dla analizowanych modeli uzyskano istotne różnice w wartościach przemieszczeń obliczonych zgodnie z teorią drugiego (II) i trzeciego (III) rzędu do wartości stanu samonaprężenia wynoszącej $S = 40$ kN. Największe rozbieżności wykryto dla modelu S6-5 i przemieszczeniu w kierunku y i tak przy minimalnym poziomie stanu samonaprężenia $S_{\min}$ błąd względny pomiędzy uzyskanymi wartościami przemieszczeń q_{y-} wynosi $1{,}2 \cdot 10^5$%, dla $S = 40$ kN – 4,69%, a dla maksymalnego poziomu stanu samonaprężenia $S_{\max}$– 0,74%.

Porównując dane zawarte w tabelach 6.7 i 6.8 oraz na rysunku 6.10a można stwierdzić, że model S6-2 jest najsztywniejszy. Przyrost poziomu stanu samonaprężenia o 1 kN powoduje średni przyrost współczynnika GSP o 0,1729 dla tego modelu. Dla modelu S6-1 ten sam przyrost poziomu stanu samonaprężenia powoduje średni przyrost GPS o 0,1334, dla modelu S6-4 – o 0,1178, natomiast dla modelu S6-5 – 0,0742.

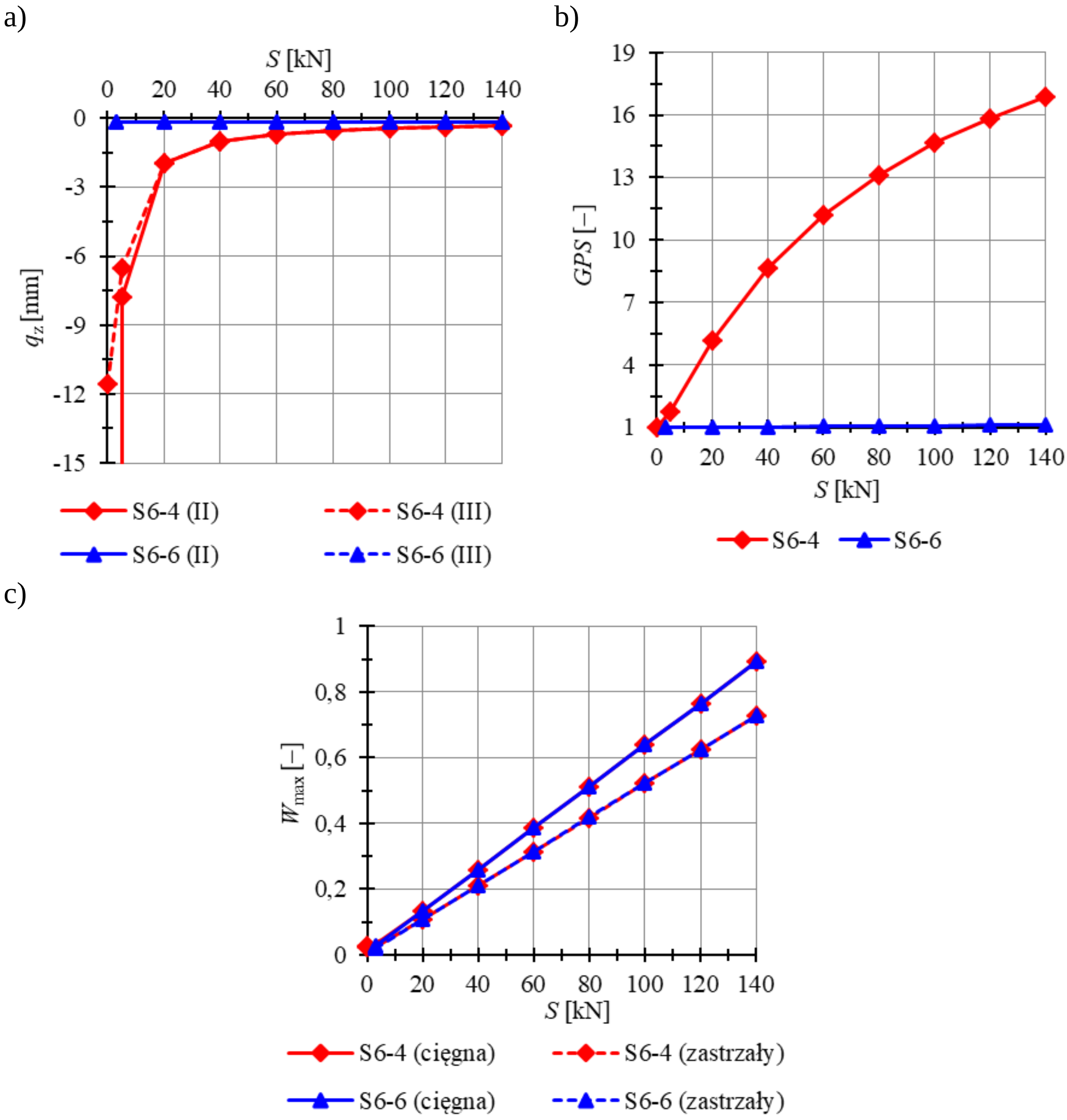
Porównując uzyskane wartości wytężeń elementów, przy niskich wartościach poziomu stanu samonaprężenia, najkorzystniejsze parametry uzyskano dla modelu

S6-4. Wraz ze wzrostem poziomu stanu samonaprężenia różnice pomiędzy stają się mniejsze, a zależność pomiędzy poziomem stanu samonaprężenia a wytężeniem – coraz bardziej liniowa. Dla rozpatrywanych modeli bardziej wytężonym elementem są cięgna. Dla modeli podpartych dołem, tj. S6-1 i S6-2 cięgna są o 12,1% bardziej wytężone niż zastrzały przy minimalnym poziomie stanu samonaprężenia $S_{\min}$ i o 21,9% przy maksymalnym poziomie stanu samonaprężenia $S_{\max}$. Dla modeli podpartych górą, tj. S6-4 i S6-5 cięgna są o 22,6% bardziej wytężone niż zastrzały niezależnie od poziomu stanu samonaprężenia.

W celu przedstawienia różnicy w zachowaniu konstrukcji w zależności od występowania mechanizmu, porównano wyniki otrzymane dla modeli S6-4 i S6-6. Na rysunku 6.11 przedstawiono wpływ poziomu stanu samonaprężenia na minimalne przemieszczenie węzłów w kierunku z (rys. 6.11a), globalny parametr sztywności (rys. 6.11b) oraz maksymalne wytężenie elementów (rys. 6.11c) struktury dla modeli S6-4 i S6-6. Dodatkowo, w tabeli 6.9 zawarto wybrane parametry statyczne otrzymane dla minimalnego i maksymalnego poziomu stanu samonaprężenia. Dla modelu S6-6 przemieszczenia analizowanych węzłów nie zależą od poziomu stanu samonaprężenia i są prawie równe zero, parametr GPS jest stały i równy 1, natomiast wytężenie elementów $W_{\max}$ zmienia się liniowo. Poziom stanu samonaprężenia nie ma wpływu na parametry statyczne modelu S6-6, a zmiana wytężenia $W_{\max}$ jest powodowana wzrostem wielkości sił inicjowanych w elementach zwiększającym się poziomem sprężenia konstrukcji.

Tabela 6.9. *Charakterystyki wytrzymałościowe dla modeli S6-4 i S6-6*

S [kN]	typ elementu	*Model S6-4* ($S_{\min} = 0{,}01$ kN)			*Model S6-6* ($S_{\min} = 3$ kN)		
		N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]	N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]
$S_{\min}$	cięgna	3,1	0,028	1,0	2,9	0,026	1,0
	zastrzały	-4,4	0,023		-4,1	0,021	
140	cięgna	98,2	0,891	16,9	98,3	0,892	1,1
	zastrzały	-140,9	0,727		-141,0	0,727	



Rys. 6.11. Wpływ stanu samonaprężenia S na: a) minimalne przemieszczenie węzłów w kierunku z, b) globalny parametr sztywności GPS, c) wytężenie elementów W_{max} modeli S6-4 i S6-5

6.3.2. 10-modułowa płyta *Simplex*

Kolejną rozpatrywaną konstrukcją jest płyta składająca się z 10 modułów *Simplex* (rys. 6.11a). Wszystkie analizowane struktury są kratownicami (***K***), zastrzały znajdują się wewnątrz układu elementów rozciąganych (***W***) o pomijalnie małej sztywności na ściskanie (***C***). We wszystkich rozpatrywanych 3 modelach wystąpiły stany samonaprężenia (***S***), których liczba zależy od liczby zablokowanych stopni swobody.

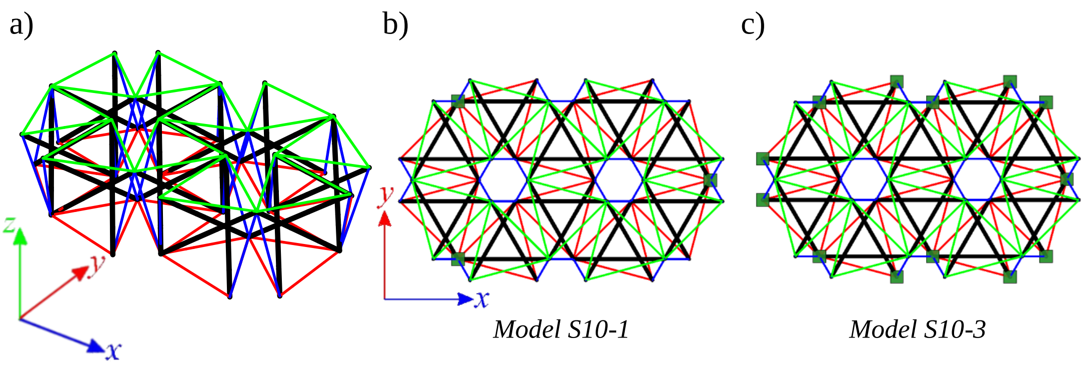
Stabilność układu zapewniła superpozycja stanu naprężenia uzyskanego dla pojedynczej struktury. Model S10-1 ze względu na występowanie mechanizmu infinitezymalnego (***M***), zaliczono do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 1, natomiast pozostałe modele S10-2 i S10-3 – do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 2. Rezultaty analizy jakościowej 10-modułowych płyt *Simplex* przedstawiono w 5.3.2.

W dalszych rozważaniach skupiono się na modelach S10-1 (rys. 6.12b) i S10-3 (rys. 6.12c). Rozpatrywane modele zostały obciążone siłami $P_z = -1$ kN działającym w kierunku osi z, przyłożonymi do górnych węzłów konstrukcji, tj. węzłów 20-38.

Przeanalizowano wpływ stanu samonaprężenia na:

- minimalne przemieszczenia węzłów w kierunku x (rys. 6.13a), y (rys. 6.13b) i z (rys. 6.13c),
- globalny parametr sztywności GPS (rys. 6.14a),
- wytężenie elementów W_{max} (rys. 6.14b).

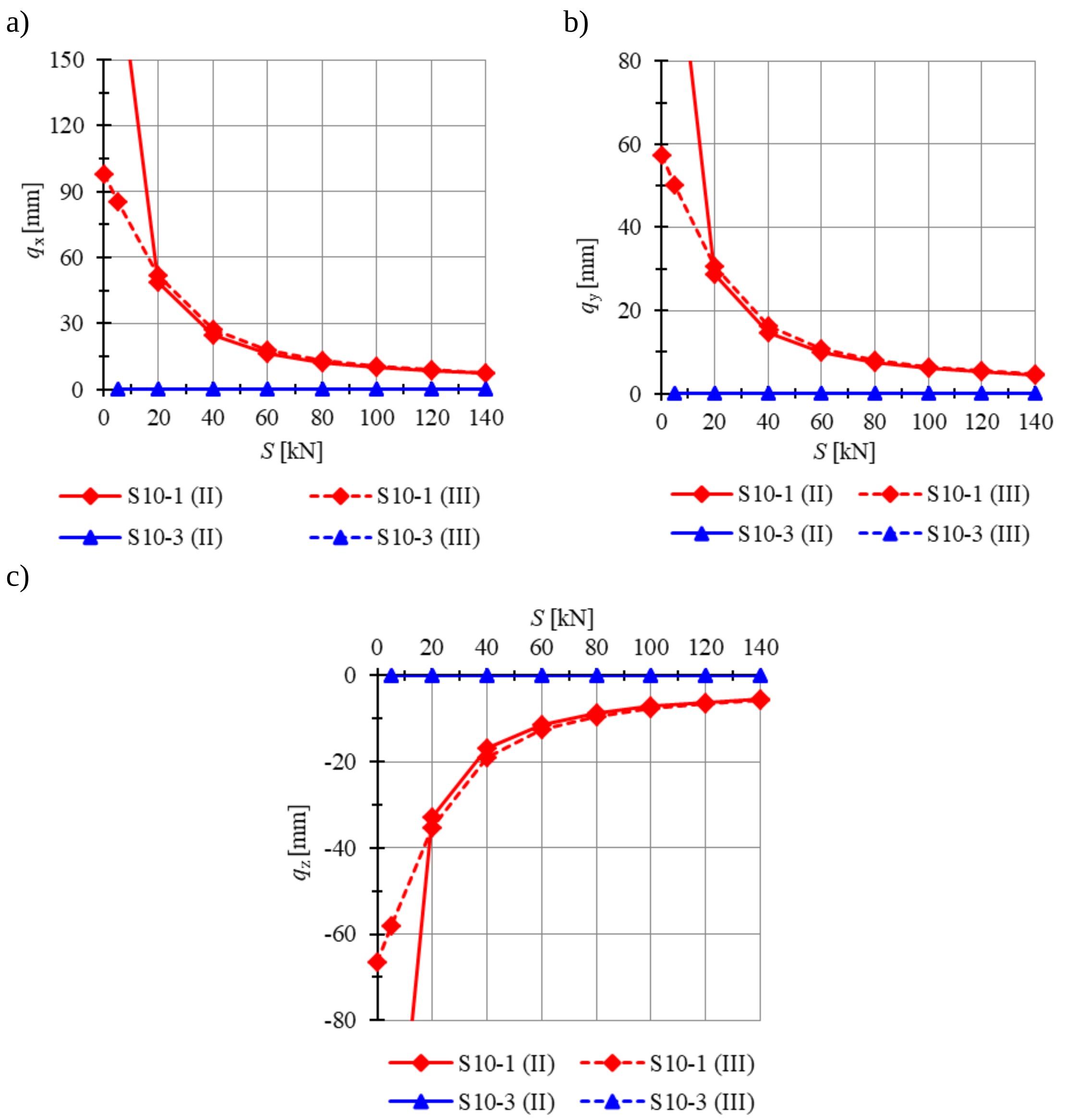
W tabeli 6.10 zawarto wybrane parametry statyczne otrzymane dla minimalnego i maksymalnego poziomu stanu samonaprężenia.



Rys. 6.12. a) Geometria 10-modułowej płyty *Simplex*, b) model konstrukcji o cechach tensegrity klasy 1, c) model o cechach tensegrity klasy 2

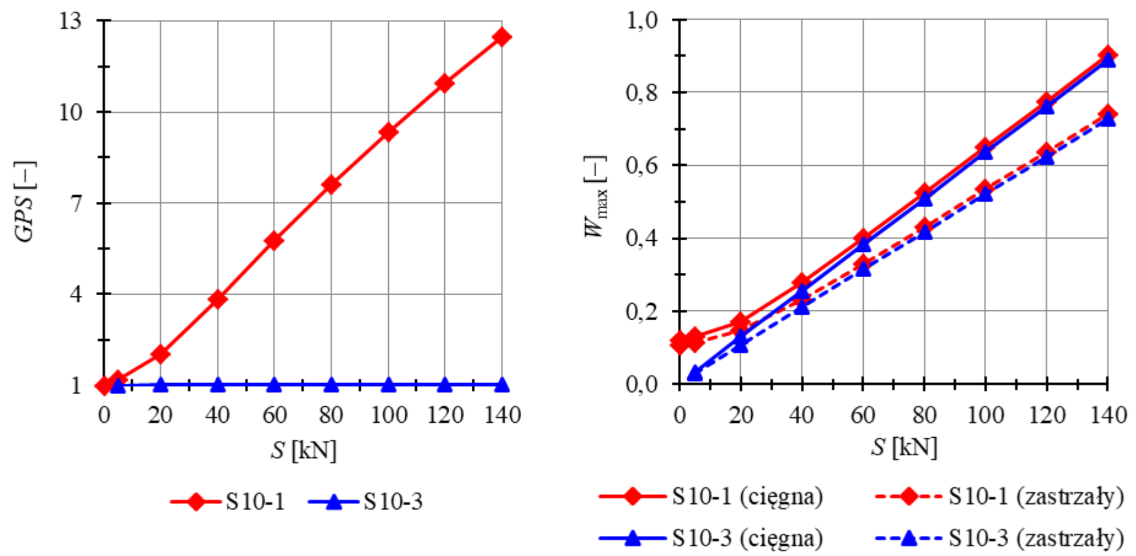
Tabela 6.10. *Charakterystyki wytrzymałościowe dla modeli S10-1 i S10-3*

S **[kN]**	**typ elementu**	*Model S10-1* ($S_{\min} = 0{,}01$ kN) N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]	*Model S10-3* ($S_{\min} = 2$ kN) N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]
$\mathbf{S_{min}}$	cięgna	13,5	0,122	1,0	1,7	0,015	1,0
$\mathbf{S_{min}}$	zastrzały	-20,8	0,107	1,0	-3,0	0,015	1,0
140	cięgna	99,3	0,901	12,5	97,8	0,888	1,0
140	zastrzały	-143,4	0,740	12,5	-141,0	0,727	1,0



Rys. 6.13. Wpływ stanu samonaprężenia na przemieszczenia: a) q_{x}, b) q_{y}, c) q_{z} modeli S10-1 i S10-3

a) b)



Rys. 6.14. Wpływ stanu samonaprężenia S na: a) globalny parametr sztywności GPS, b) wytężenie elementów W_{max} modeli S10-1 i S10-3

Dla modelu S10-1 wartość minimalnego poziomu stanu samonaprężenia wynosi $S_{\min} = 0{,}01$ kN, natomiast dla modelu S10-3 – $S_{\min} = 2$ kN. Dla modelu S10-3 nie uzyskano różnic pomiędzy wynikami uzyskanymi przy zastosowaniu teorii drugiego (II) i trzeciego (III) rzędu ze względu na brak mechanizmu. Dla modelu S10-1 przy minimalnym poziomie stanu samonaprężenia $S_{\min}$ dla przemieszczeń w kierunku x uzyskano błąd względny równy $9{,}9 \cdot 10^4$%, natomiast przy maksymalnym poziomie stanu samonaprężenia $S_{\max}$ – 4,26%.

Dla modelu S10-3 wartość współczynnika GPS jest stała i wynosi 1. Dla modelu S10-1 przyrost poziomu stanu samonaprężenia o 1 kN powoduje średni przyrost współczynnika GSP o 0.0854.

Porównując uzyskane wartości wytężeń elementów, korzystniejsze wartości uzyskano dla modelu S10-3, chociaż nie są to istotnie różnice. Zależność pomiędzy poziomem stanu samonaprężenia a wytężeniem elementów jest liniowa dla modelu S10-3, natomiast dla modelu S10-1 staje się coraz bardziej liniowa wraz ze wzrostem poziomu stanu samonaprężenia. Dla modelu S10-1 cięgna są o 13,9% bardziej wytężone niż zastrzały przy minimalnym poziomie stanu samonaprężenia $S_{\min}$ i o 21,8% przy maksymalnym poziomie stanu samonaprężenia $S_{\max}$. Dla modelu S10-3 przy minimalnym poziomie stanu samonaprężenia $S_{\min}$ cięgna są o 1,02% mniej wytężone niż zastrzały, natomiast przy maksymalnym poziomie stanu samonaprężenia $S_{\max}$ cięgna są o 22,1% bardziej wytężone niż zastrzały.

6.3.3. 14-modułowa płyta *Simplex*

Kolejną rozpatrywaną konstrukcją jest płyta składająca się z 14 modułów *Simplex* (rys. 6.14a). Wszystkie analizowane struktury są kratownicami ($\boldsymbol{K}$), zastrzały znajdują się wewnątrz układu elementów rozciąganych ($\boldsymbol{W}$) o pomijalnie małej sztywności na ściskanie ($\boldsymbol{C}$). We wszystkich rozpatrywanych 3 modelach wystąpiły stany samonaprężenia ($\boldsymbol{S}$), których liczba zależy od liczby zablokowanych stopni swobody. Stabilność układu zapewniła superpozycja stanu naprężenia uzyskanego dla pojedynczej struktury. Model S14-1 ze względu na występowanie mechanizmu infinitezymalnego ($\boldsymbol{M}$), zaliczono do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 1, natomiast pozostałe modele S14-2 i S14-3 – do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 2. Rezultaty analizy jakościowej 14-modułowych płyt *Simplex* przedstawiono w 5.3.3.

W dalszych rozważaniach skupiono się na modelach S14-1 (rys. 6.14b) i S14-3 (rys. 6.14c). Rozpatrywane modele zostały obciążone siłami $P_{\mathrm{z}} = -1$ kN działającym w kierunku osi z, przyłożonymi do górnych węzłów konstrukcji, tj. węzłów 27-52.

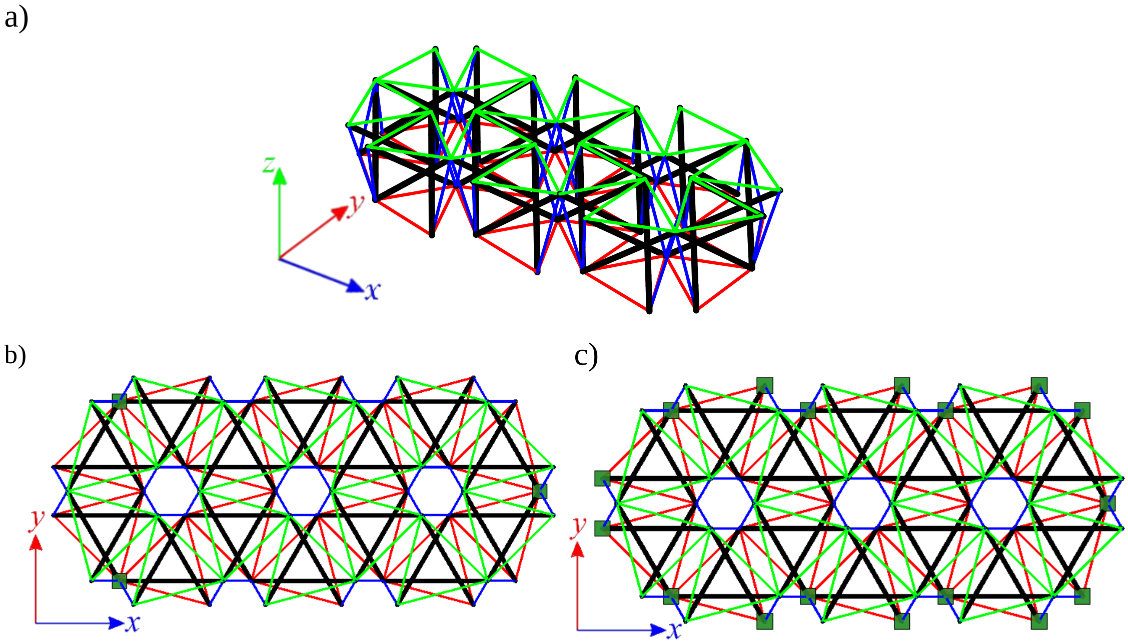
Przeanalizowano wpływ stanu samonaprężenia na:

- minimalne przemieszczenia węzłów w kierunku x (rys. 6.16a), y (rys. 6.16b) i z (rys. 6.16c),
- globalny parametr sztywności GPS (rys. 6.17a),
- wytężenie elementów W_{max} (rys. 6.17b).

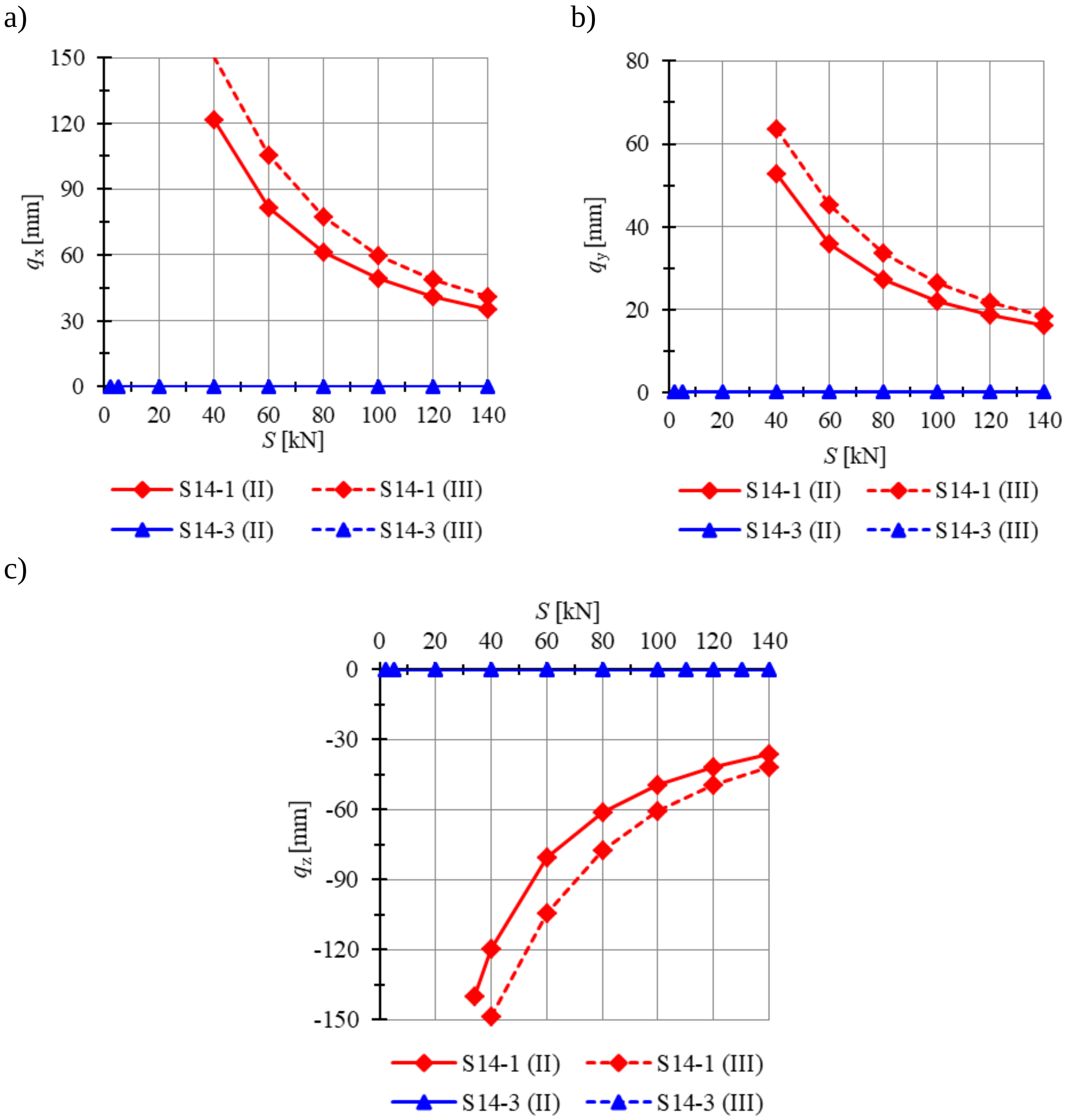
W tabeli 6.11 zawarto wybrane parametry statyczne otrzymane dla minimalnego i maksymalnego poziomu stanu samonaprężenia.

Tabela 6.11. *Charakterystyki wytrzymałościowe dla modeli S14-1 i S14-3*

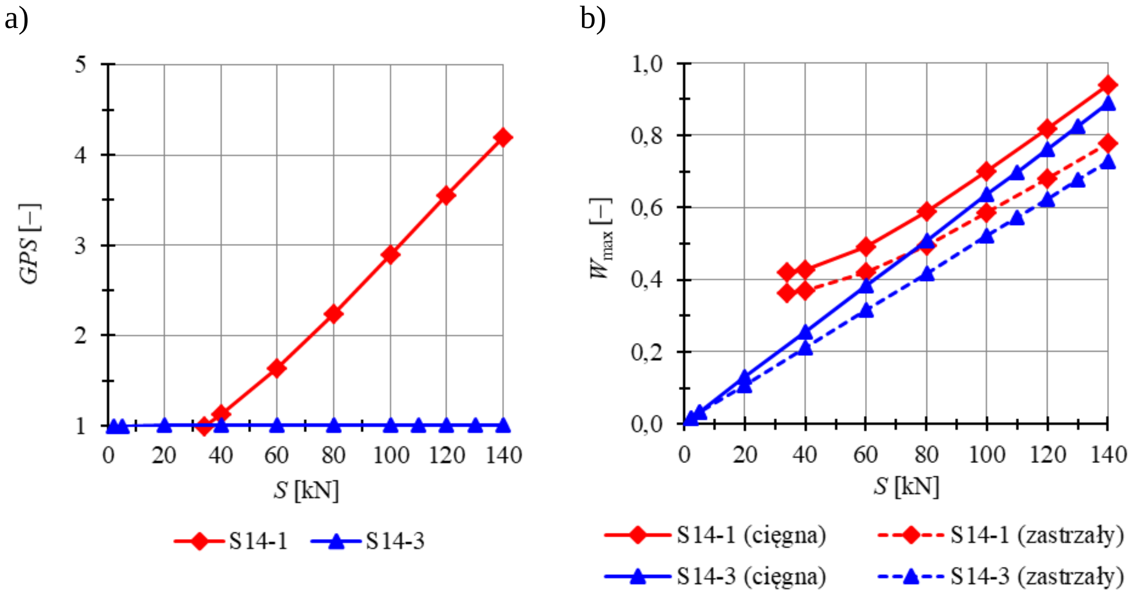
S [kN]	**typ elementu**	*Model S14-1* ($S_{\mathrm{min}} = 34$ kN)			*Model S14-3* ($S_{\mathrm{min}} = 2$ kN)		
		N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]	N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]
$\boldsymbol{S_{\mathrm{min}}}$	cięgna	46,2	0,420	1,0	1,7	0,015	1,0
	zastrzały	-70,2	0,362		-3,0	0,016	
140	cięgna	103,7	0,941	4,2	97,8	0,888	1,0
	zastrzały	-151,1	0,779		141,0	0,727	



Rys. 6.15. a) Geometria 14-modułowej płyty *Simplex*, b) model konstrukcji o cechach tensegrity klasy 1, c) model o cechach tensegrity klasy 2



Rys. 6.16. Wpływ stanu samonaprężenia na przemieszczenia: a) q_x, b) q_y, c) q_z modeli S14-1 i S14-3



Rys. 6.17. Wpływ stanu samonaprężenia S na: a) globalny parametr sztywności GPS, b) wytężenie elementów W_{max} modeli S14-1 i S14-3

Dla modelu S14-1 wartość minimalnego poziomu stanu samonaprężenia wynosi $S_{\min} = 34$ kN, natomiast dla modelu S10-3 – $S_{\min} = 2$ kN. Dla modelu S14-3 nie uzyskano różnic pomiędzy wynikami uzyskanymi przy zastosowaniu teorii drugiego (II) i trzeciego (III) rzędu ze względu na brak mechanizmu. W przypadku modelu S14-1 uzyskano istotne różnice pomiędzy rezultatami otrzymanymi z zastosowaniem teorii II i III rzędu. W przypadku tego modelu konieczna jest analiza nieliniowa niezależnie od wprowadzonego poziomu stanu samonaprężenia.

Dla modelu S14-3 wartość współczynnika GPS jest stała i wynosi 1. Dla modelu S14-1 przyrost poziomu stanu samonaprężenia o 1 kN powoduje średni przyrost współczynnika GSP o 0,0304.

Porównując uzyskane wartości wytężeń elementów, korzystniejsze wartości uzyskano dla modelu S14-3, chociaż nie są to istotnie różnice. Zależność pomiędzy poziomem stanu samonaprężenia a wytężeniem elementów jest liniowa dla modelu S14-3, natomiast dla modelu S14-1 staje się coraz bardziej liniowa wraz ze wzrostem poziomu stanu samonaprężenia. Dla modelu S14-1 cięgna są o 16,0% bardziej wytężone niż zastrzały przy minimalnym poziomie stanu samonaprężenia $S_{\min}$ i o 20,7% przy maksymalnym poziomie stanu samonaprężenia $S_{\max}$. Dla modelu S14-3 przy minimalnym poziomie stanu samonaprężenia $S_{\min}$ cięgna są o 3,5% mniej wytężone niż zastrzały, natomiast przy maksymalnym poziomie stanu samonaprężenia $S_{\max}$ cięgna są o 22,0% bardziej wytężone niż zastrzały.

6.3.4. 18-modułowa płyta *Simplex*

Kolejnymi rozpatrywanymi konstrukcjami są płyty składające się z 18 modułów *Simplex* (rys. 6.18a). Wszystkie analizowane struktury są kratownicami (***K***), zastrzały znajdują się wewnątrz układu elementów rozciąganych (***W***) o pomijalnie małej sztywności na ściskanie (***C***). We wszystkich rozpatrywanych 3 modelach wystąpiły stany samonaprężenia (***S***), których liczba zależy od liczby zablokowanych stopni swobody. Stabilność układu zapewniła superpozycja stanu naprężenia uzyskanego dla pojedynczego modułu. Model S18-1 ze względu na występowanie mechanizmu infinitezymalnego (***M***), zaliczono do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 1, natomiast pozostałe modele S18-2 i S18-3 – do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 2. Rezultaty analizy jakościowej 18-modułowych płyt *Simplex* przedstawiono w 5.3.4.

W dalszych rozważaniach skupiono się na modelach S18-1 (rys. 6.18b) i S18-3 (rys. 6.18c). Rozpatrywane modele zostały obciążone siłami $P_{\mathrm{z}} = -1$ kN działającym w kierunku osi z, przyłożonymi do górnych węzłów konstrukcji, tj. węzłów 33-64.

Przeanalizowano wpływ stanu samonaprężenia na:

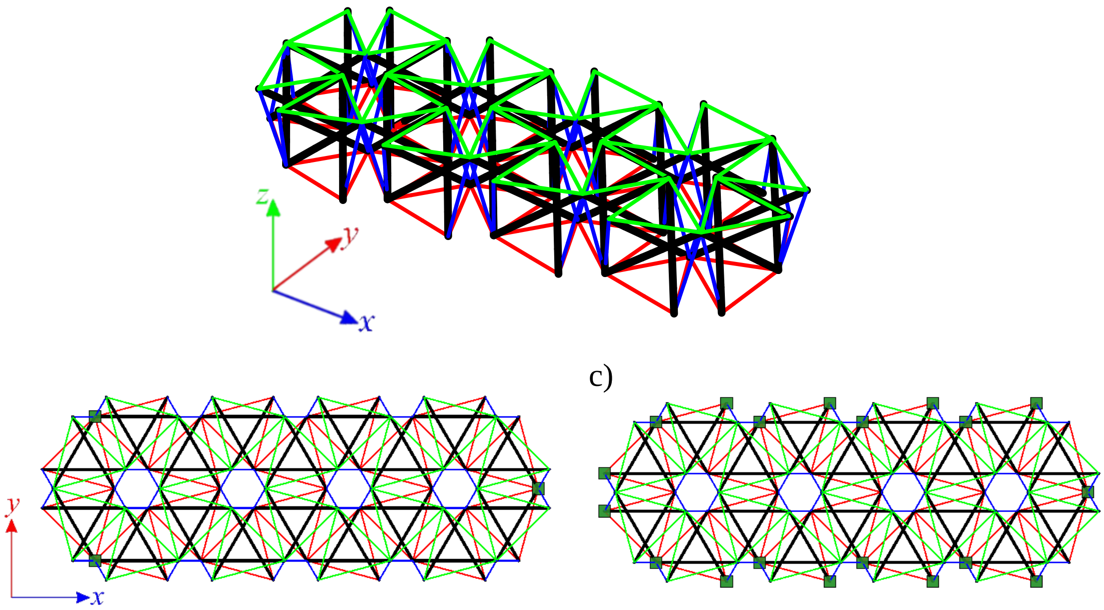
- minimalne przemieszczenia węzłów w kierunku *x* (rys. 6.19a), y (rys. 6.19b) i *z* (rys. 6.19c),
- globalny parametr sztywności GPS (rys. 6.20a),
- wytężenie elementów W_{max} (rys. 6.20b).

W przypadku modelu S18-1, wartości własne stycznej macierzy sztywności nie są dodatnie, czyli struktura nie jest stateczna przy zadanym poziomie obciążenia. Wobec powyższego, w pracy nie przedstawiono rezultatów analizy ilościowej dla modelu S18-1. W tabeli 6.12 zawarto wybrane parametry statyczne otrzymane dla minimalnego i maksymalnego poziomu stanu samonaprężenia.

a)

b)

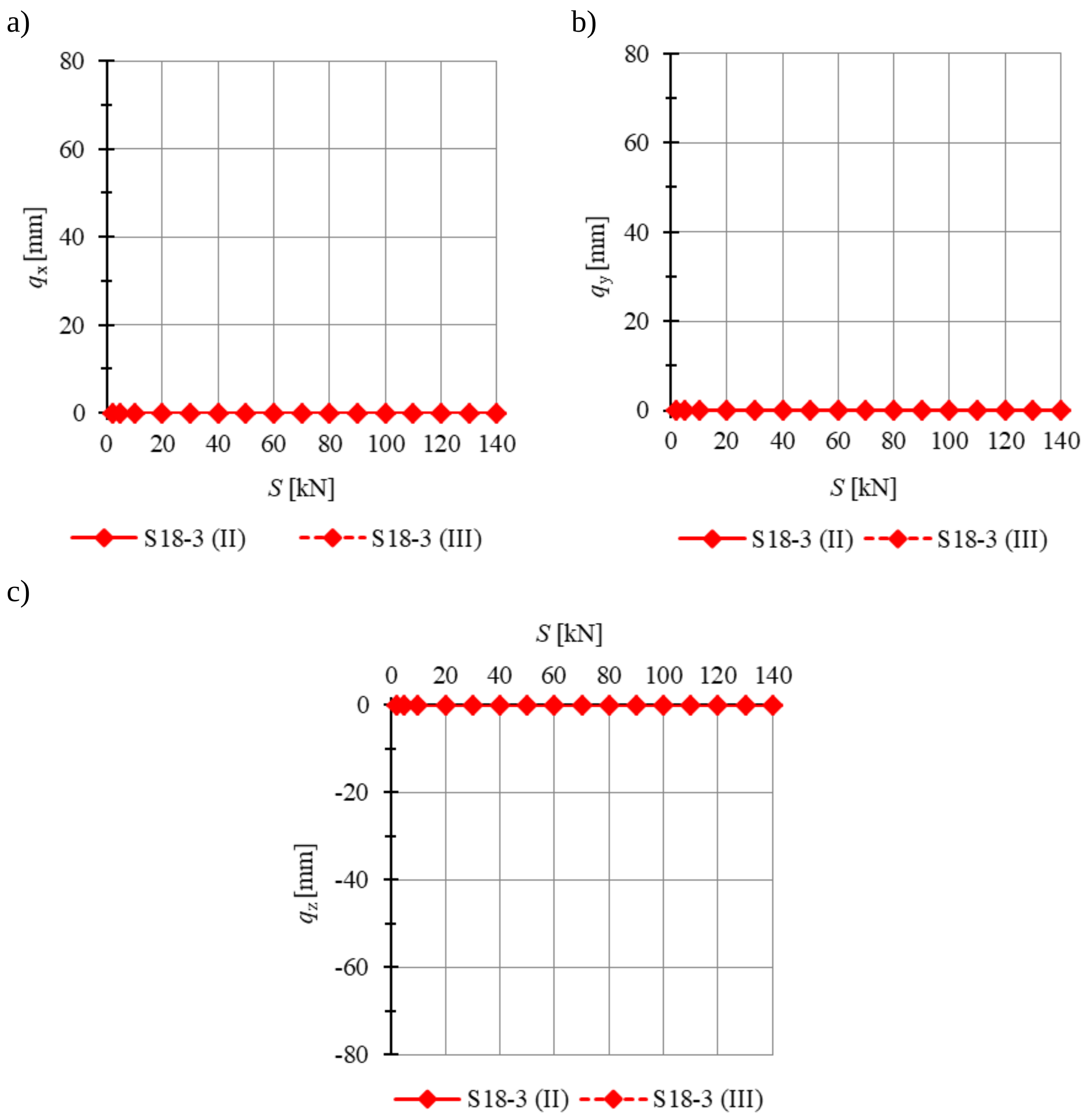
c)



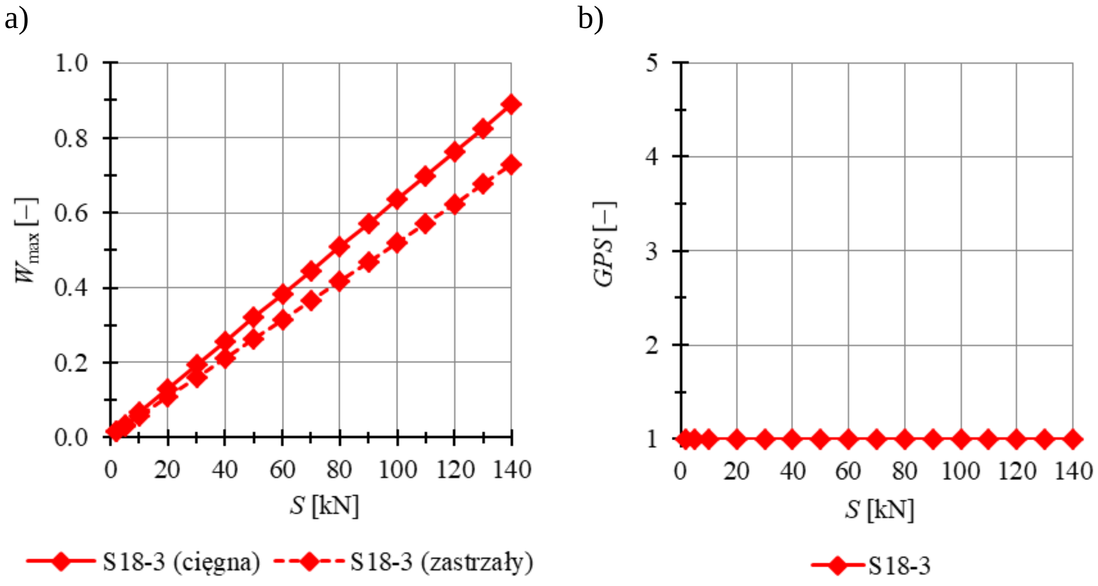
Rys. 6.18. a) geometria 18-modułowej płyty *Simplex*, b) model konstrukcji o cechach tensegrity klasy 1, c) model o cechach tensegrity klasy 2

Tabela 6.12. *Charakterystyki wytrzymałościowe dla modelu S18-3*

***S* [kN]**	**typ elementu**	*Model S18-3* ($S_{\min} = 2$ kN)		
		N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]
$\boldsymbol{S_{\min}}$	cięgna	1,8	0,016	1,0
	zastrzały	-3,0	0,016	
140	cięgna	97,9	0,889	1,0
	zastrzały	-141,0	0,727	



Rys. 6.19. Wpływ stanu samonaprężenia na przemieszczenia: a) q_x, b) q_y, c) q_z modelu S18-3



Rys. 6.20. Wpływ stanu samonaprężenia S na: a) globalny parametr sztywności GPS, b) wytężenie elementów W_{max} modelu S18-3

Dla modelu S18-3 wartość minimalnego poziomu stanu samonaprężenia – $S_{\min} = 2$ kN. Dla modelu S18-3 nie uzyskano różnic pomiędzy wynikami uzyskanymi przy zastosowaniu teorii drugiego (II) i trzeciego (III) rzędu ze względu na brak mechanizmu.

Dla modelu S18-3 wartość współczynnika GPS jest stała i wynosi 1. Zależność pomiędzy poziomem stanu samonaprężenia a wytężeniem elementów jest liniowa dla modelu S18-3. Dla modelu S18-3 przy minimalnym poziomie stanu samonaprężenia $S_{\min}$ cięgna są o 3,6% bardziej wytężone niż zastrzały, natomiast przy maksymalnym poziomie stanu samonaprężenia $S_{\max}$ cięgna są o 22,2% bardziej wytężone niż zastrzały.

6.3.5. 24-modułowa płyta *Simplex*

Następnymi rozważanymi konstrukcjami są płyty składające się z 24 modułów *Simplex* (rys. 6.20a). Analizowane struktury są kratownicami (***K***), zastrzały znajdują się wewnątrz układu elementów rozciąganych (***W***) o pomijalnie małej sztywności na ściskanie (***C***). We wszystkich rozpatrywanych 3 modelach wystąpiły stany samonaprężenia (***S***), których liczba zależy od liczby zablokowanych stopni swobody. Stabilność układu zapewniła superpozycja stanu naprężenia uzyskanego dla pojedynczej struktury. Modele S24-1 i S24-2 (rys. 6.20b) ze względu na występowanie mechanizmu infinitezymalnego (***M***), zaliczono do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 1, natomiast model S24-3 (rys. 6.20c) – do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 2. Klasyfikacja modeli jest analogiczna jak w przypadku płyt 6-modułowych, gdzie modele podparte w trzech i sześciu węzłach także zaliczono do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 1, natomiast modele podparte w dziewięciu miejscach – do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 2. Rezultaty analizy jakościowej 24-modułowych płyt *Simplex* przedstawiono w 5.4.4.

Rozpatrywane modele zostały obciążone siłami $P_z = -1$ kN działającym w kierunku osi z, przyłożonymi do górnych węzłów konstrukcji, tj. węzłów 33-64.

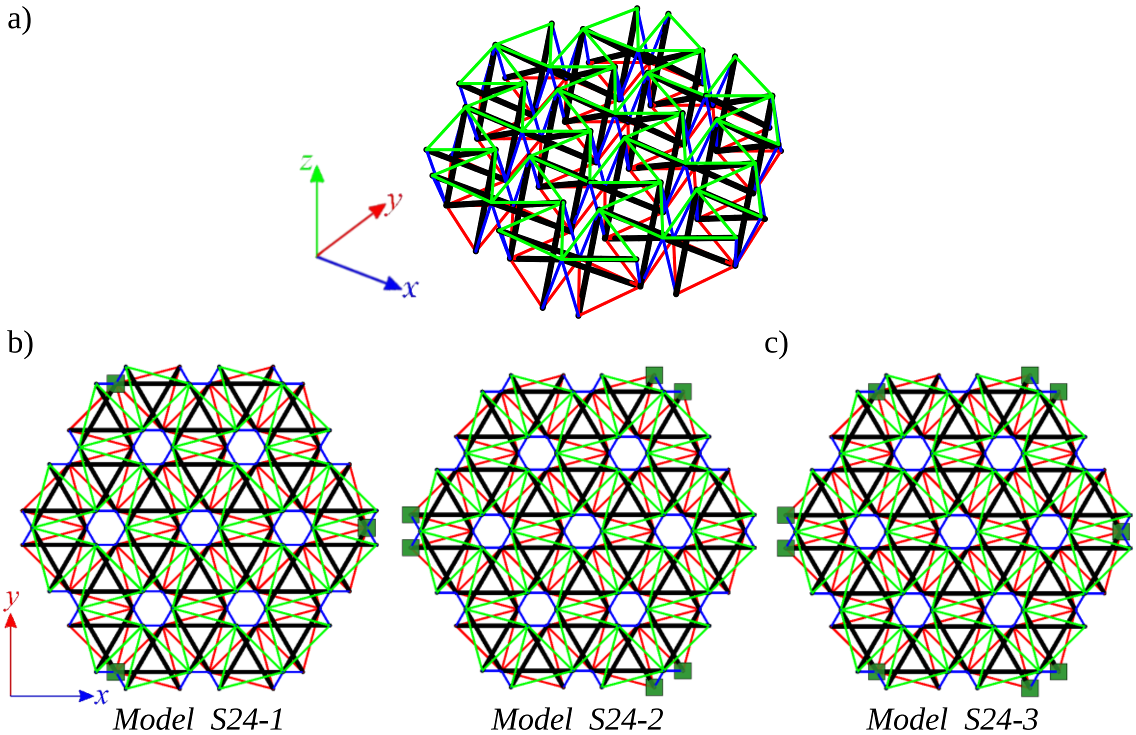
Przeanalizowano wpływ stanu samonaprężenia na:

– minimalne przemieszczenia węzłów w kierunku x (rys. 6.22a), y (rys. 6.22b) i z (rys. 6.22c),
– globalny parametr sztywności GPS (rys. 6.23a),
– wytężenie elementów W_{max} (rys. 6.23b).

W tabeli 6.13 zawarto wybrane parametry statyczne otrzymane dla minimalnego i maksymalnego poziomu stanu samonaprężenia.

a)

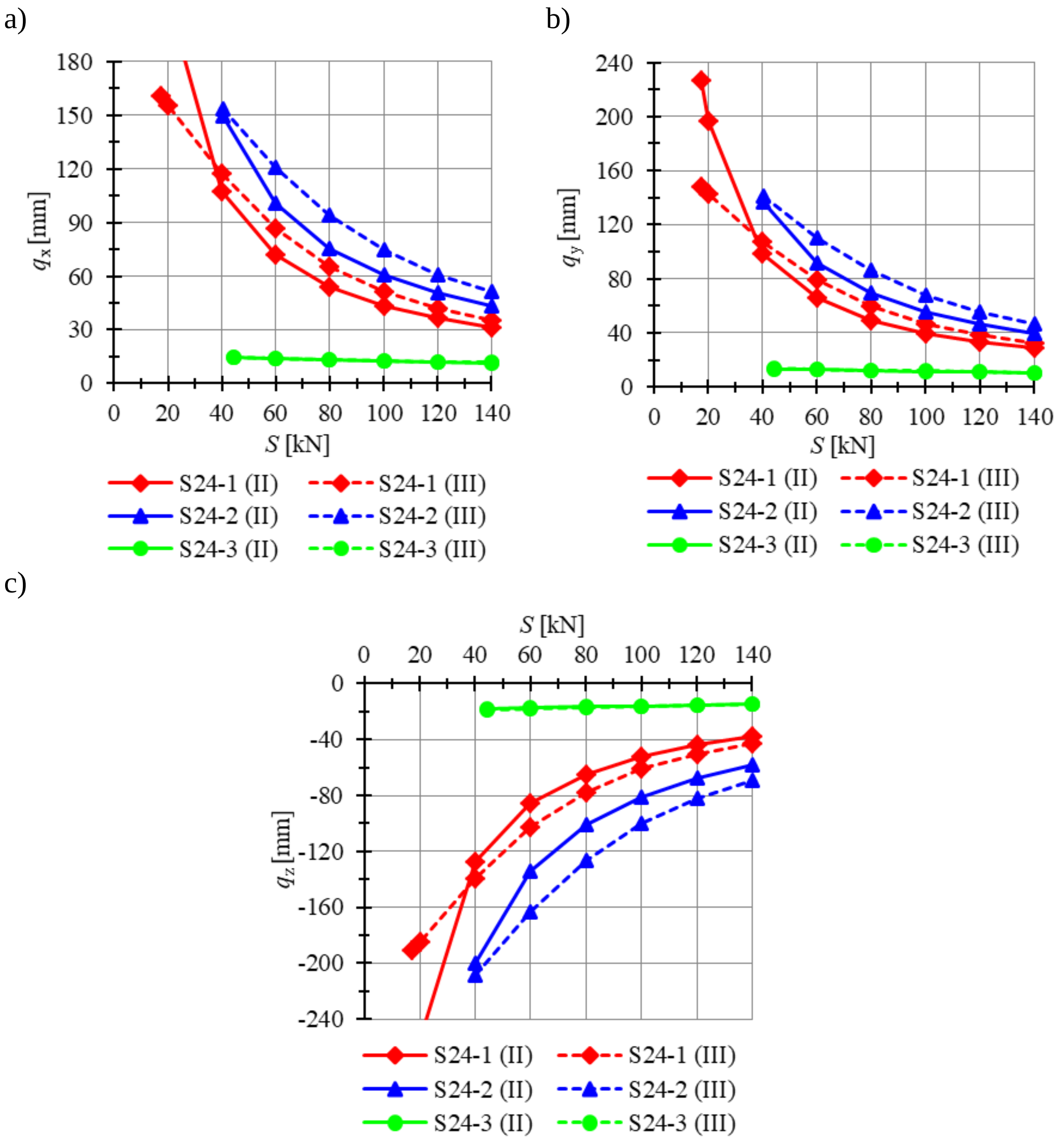
b) c)



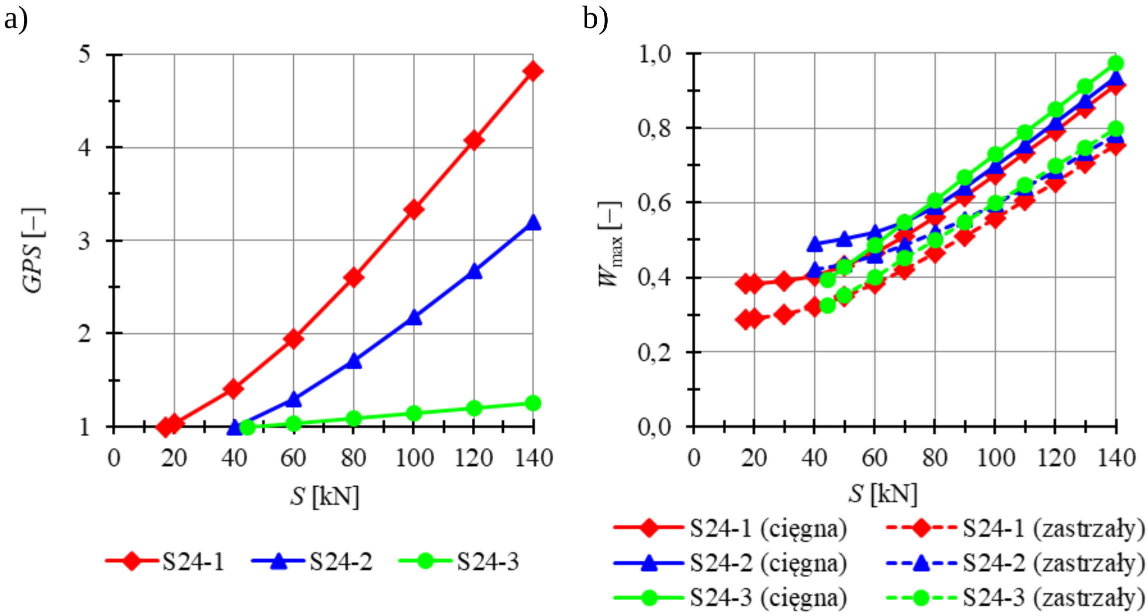
Rys. 6.21. a) geometria 20-modułowej płyty *Simplex*, b) modele konstrukcji o cechach tensegrity klasy 1, c) model o cechach tensegrity klasy 2

Tabela 6.13. *Charakterystyki wytrzymałościowe dla modeli S24-1 – S24-3*

S [kN]	**typ elementu**	*Model S24-1* (S_{min} = 17,3 kN) N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]	*Model S24-2* (S_{min} = 40,2 kN) N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]	*Model S24-3* (S_{min} = 44,5 kN) N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]
$\boldsymbol{S_{\text{min}}}$	cięgna	42,2	0,383	1,0	54,1	0,491	1,0	43,4	0,394	1,0
	zastrzały	-55,5	0,286		-81,5	0,421		-62,9	0,324	
140	cięgna	100,8	0,915	4,8	103,0	0,935	3,2	107,3	0,973	1,3
	zastrzały	-146,4	0,755		-151,4	0,781		-154,9	0,799	



Rys. 6.22. Wpływ stanu samonaprężenia na przemieszczenia: a) q_{x}, b) q_{y}, c) q_{z} modeli S10-1 i S10-3



Rys. 6.23. Wpływ stanu samonaprężenia S na: a) globalny parametr sztywności GPS, b) wytężenie elementów W_{max} modeli S24-1 – S24-3

Najniższą wartość minimalnego poziomu stanu samonaprężenia uzyskano dla modelu S24-1 i wynosi ona $S_{\mathrm{min}} = 17{,}3$ kN, najwyższą wartość uzyskano natomiast dla modelu S24-3 – wynosi ona $S_{\mathrm{min}} = 44{,}5$ kN. Dla modelu S24-2 uzyskano wartość minimalnego poziomu stanu samonaprężenia $S_{\mathrm{min}} = 40{,}2$ kN. Dla modelu S24-3 nie uzyskano różnic pomiędzy wynikami uzyskanymi przy zastosowaniu teorii drugiego (II) i trzeciego (III) rzędu ze względu na brak mechanizmu. Porównując wyniki otrzymane dla poprzednio rozpatrywanych konstrukcji niecharakteryzujących się obecnością mechanizmu, dla modelu S24-3 uzyskano znaczne wartości przemieszczeń. Dodatkowo, dla modelu S24-3 stan samonaprężenia ma nieznaczny wpływ na przemieszczenia.

Dla modelu S24-1 przyrost poziomu stanu samonaprężenia o 1 kN powoduje średni przyrost współczynnika GSP o 0,0313, dla modelu S24-2 – 0,0223, natomiast dla modelu S24-3 – 0,0026. W przypadku modelu S24-3, GPS nie jest stały, w odróżnieniu od poprzednio analizowanych konstrukcji bez mechanizmu, a zmienia się liniowo. Zmiana ta jest niewielka – przyrost poziomu stanu samonaprężenia o 1 kN powoduje średni przyrost współczynnika GSP o 0,0031.

Porównując uzyskane wartości wytężeń elementów, korzystniejsze wartości uzyskano dla modelu S24-3, chociaż nie są to istotnie różnice. Zależność pomiędzy poziomem stanu samonaprężenia a wytężeniem elementów jest liniowa dla modelu S24-3, natomiast dla modelu S10-1 staje się coraz bardziej liniowa wraz ze wzrostem poziomu stanu samonaprężenia. Dla modelu S24-1 cięgna są o 33,7% bardziej wytężone niż zastrzały przy minimalnym poziomie stanu samonaprężenia $S_{\min}$ i o 21,1% przy maksymalnym poziomie stanu samonaprężenia $S_{\max}$. Dla modelu S24-3 przy minimalnym poziomie stanu samonaprężenia $S_{\min}$ cięgna są o 21,6% bardziej wytężone niż zastrzały, natomiast przy maksymalnym poziomie stanu samonaprężenia $S_{\max}$ cięgna są o 21,9% bardziej wytężone niż zastrzały.

6.4. Struktury zbudowane z modułu *modified Simplex*

Kolejną rozważaną grupą konstrukcji są struktury zbudowane z modułu *modified Simplex.* Długość zastrzałów dla struktur zbudowanych z tego modułu wynosi $L = 1{,}33$ m, a ich nośność – $N_{b,Rd} = 203{,}5$ kN. Maksymalna siła sprężenia w cięgnach wynosi $N_{max} = 1{,}581 \cdot S$. Rozpatrzone zostaną płyty składające się z sześciu, dziesięciu, czternastu i dwudziestu czterech modułów. Minimalny stan samonaprężenia został przyjęty tak, aby zapewnić właściwą identyfikację elementów struktury i różni się w zależności od przyjętego schematu statycznego, natomiast maksymalny stan samonaprężenia założono równy $S_{\max} = 60$ kN, odpowiadający maksymalnemu wytężeniu cięgien na poziomie 98,2%.

6.4.1. 6-modułowa płyta *modified Simplex*

Pierwszą w kolejności rozważaną strukturą zbudowaną z modułów *modified Simplex* jest płyta 6-modułowa. Rozpatrzono 6 modeli różniących się sposobem podparcia. Wszystkie analizowane struktury są kratownicami (***K***), zastrzały znajdują się wewnątrz układu elementów rozciąganych (***W***) o pomijalnie małej sztywności na ściskanie (***C***). We wszystkich rozważanych 6 modelach wystąpiły stany samonaprężenia (***S***), których liczba zależy od liczby zablokowanych stopni swobody. Otrzymane stany samonaprężenia nie definiują jednoznacznie elementów konstrukcji, dopiero uwzględnienie stanu samonaprężenia pojedynczego modułu pozwoliło zidentyfikować rodzaje elementów. W związku z powyższym, modele MS6-1 – MS6-4 (rys. 6.24a), charakteryzujące się występowaniem mechanizmu infinitezymalnego (***M***), zaliczono do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 1, natomiast modele MS6-5 i MN6-6 ze względu na brak mechanizmu – do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 2. Analizę jakościową płyt 6-modułowych zbudowanych z modułów *modified Simplex* opisano w 5.4.1.

Wszystkie modele zostały obciążone siłami $P_z = -1$ kN działającym w kierunku osi z, przyłożonymi do górnych węzłów konstrukcji, tj. węzłów 8-19.

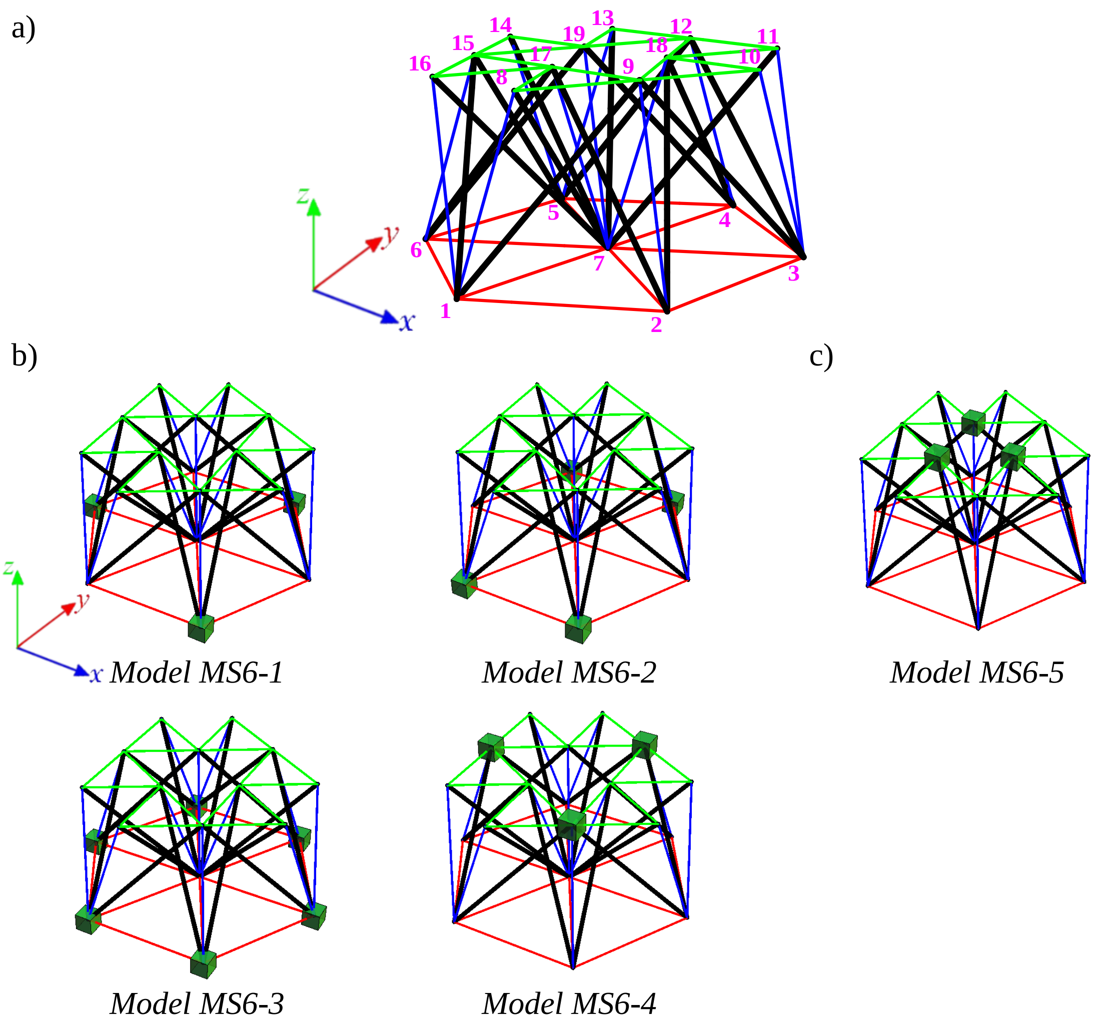
Przeanalizowano wpływ stanu samonaprężenia na:

– minimalne przemieszczenia węzłów w kierunku x (rys. 6.25a), y (rys. 6.25b) i z (rys. 6.25c),

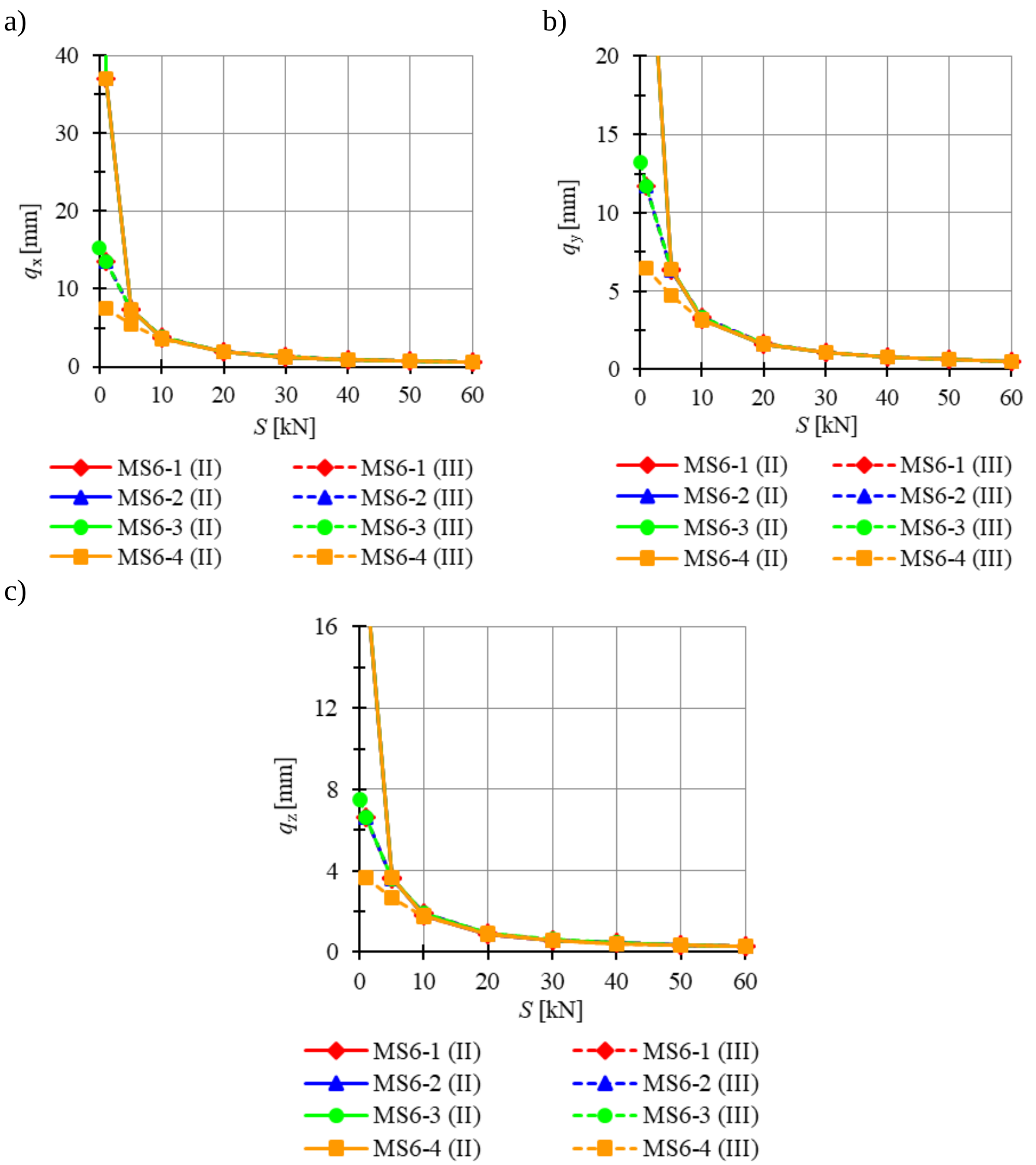
– globalny parametr sztywności GPS (rys. 6.26a),

– wytężenie elementów W_{max} (rys. 6.26b).

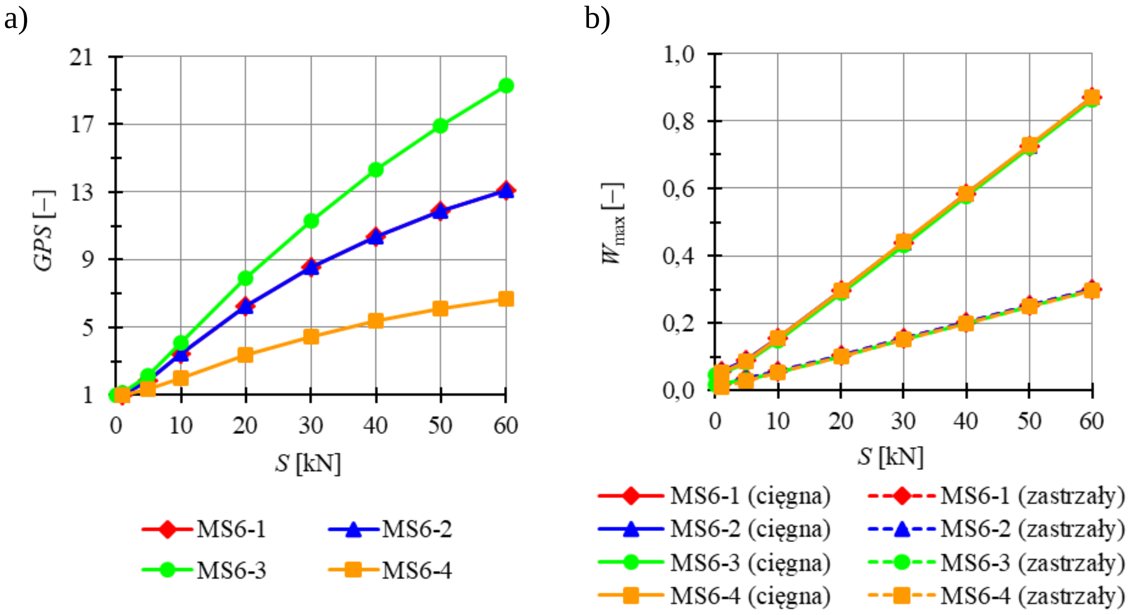
W tabelach 6.14 i 6.15 zawarto wybrane parametry statyczne otrzymane dla minimalnego i maksymalnego poziomu stanu samonaprężenia.



Rys. 6.24. a) Geometria 6-modułowej płyty *modified Simplex*, b) modele konstrukcji o cechach tensegrity klasy 1, c) model o cechach tensegrity klasy 2



Rys. 6.25. Wpływ stanu samonaprężenia na przemieszczenia: a) q_x, b) q_y, c) q_z modeli MS6-1 – MS6-4



Rys. 6.26. Wpływ stanu samonaprężenia S na: a) globalny parametr sztywności GPS, b) wytężenie elementów W_{max} modeli S6-1, S6-2, S6-4 i S6-5

Tabela 6.14. *Charakterystyki wytrzymałościowe dla modeli MS6-1 i MS6-2*

S [kN]	**typ elementu**	*Model MS6-1* ($S_{\min} = 1$ kN)			*Model MS6-2* ($S_{\min} = 1$ kN)		
		N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]	N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]
$\boldsymbol{S_{\min}}$	cięgna	6,4	0,058	1,0	6,4	0,058	1,0
	zastrzały	-4,7	0,023		-4,7	0,023	
60	cięgna	95,9	0,870	13,1	95,9	0,870	13,1
	zastrzały	-31,3	0,301		-31,3	0,301	

Tabela 6.15. *Charakterystyki wytrzymałościowe dla modeli MS6-3 i MS6-4*

S [kN]	**typ elementu**	*Model MS6-3* ($S_{\min} = 0{,}01$kN)			*Model MS6-4* ($S_{\min} = 1$ kN)		
		N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]	N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]
$\boldsymbol{S_{\min}}$	cięgna	5,2	0,047	1,0	6,1	0,055	1,0
	zastrzały	-3,9	0,019		-2,3	0,011	
60	cięgna	95,1	0,863	19,3	96,1	0,872	6,7
	zastrzały	60,8	0,299		-60,8	0,299	

Dla modeli MS6-1, MS6-2 i MS6-4 wartość minimalnego poziomu stanu samonaprężenia wynosi $S_{\min} = 1$ kN, natomiast dla modelu MS6-3 – $S_{\min} = 0{,}01$ kN. Dla wszystkich analizowanych modeli uzyskano nieznaczne różnice w wartościach przemieszczeń. Dużą rozbieżność zaobserwowano także przy porównaniu rezultatów obliczonych zgodnie z teorią drugiego (II) i trzeciego (III) rzędu do wartości stanu samonaprężenia $S = 10$ kN. Po przekroczeniu tej wartości wyniki uzyskane przy zastosowaniu obu teorii są zbieżne i tak, przykładowo, dla maksymalnego przemieszczenia w kierunku z dla modelu MS6-1 przy minimalnym poziomie stanu samonaprężenia $S_{\min} = 1$ kN błąd względny pomiędzy wartościami przemieszczeń wynosi 178,8%, dla $S = 10$ kN – 4,4%, a dla $S_{\max} = 60$ kN – 1,15 kN.

Porównując dane zawarte w tabelach 6.14 i 6.15 oraz na rysunku 6.25a można stwierdzić, że model MS6-3 jest najsztywniejszy, natomiast model MS6-4 jest najmniej sztywny. Dla modeli MS6-1 i MS6-2 uzyskano zbieżne wartości współczynnika GPS. Przyrost poziomu stanu samonaprężenia o 1 kN powoduje średni przyrost współczynnika GSP o 0.3169 dla modelu MS6-3, 0,2113 dla modeli MS6-1 i MS6-2 oraz 0,1009 dla modelu MS6-4.

Dla rozpatrywanych modeli uzyskano porównywalne wartości wytężeń elementów. Wraz ze wzrostem poziomu stanu samonaprężenia różnice pomiędzy wartościami wytężeń elementów stają się mniejsze, a zależność pomiędzy poziomem stanu samonaprężenia a wytężeniem – coraz bardziej liniowa. Dla rozpatrywanych modeli bardziej wytężonym elementem są cięgna, a różnica między wytężeniami cięgien i zastrzałów rośnie wraz ze wzrostem poziomu stanu samonaprężenia. Przykładowo, dla modelu MS6-1 przy minimalnym poziomie stanu samonaprężenia $S_{\min} = 1$ kN cięgna są o 150,3% bardziej wytężone niż zastrzały, natomiast przy minimalnym poziomie stanu samonaprężenia $S_{\max} = 60$ kN – o 188,7%.

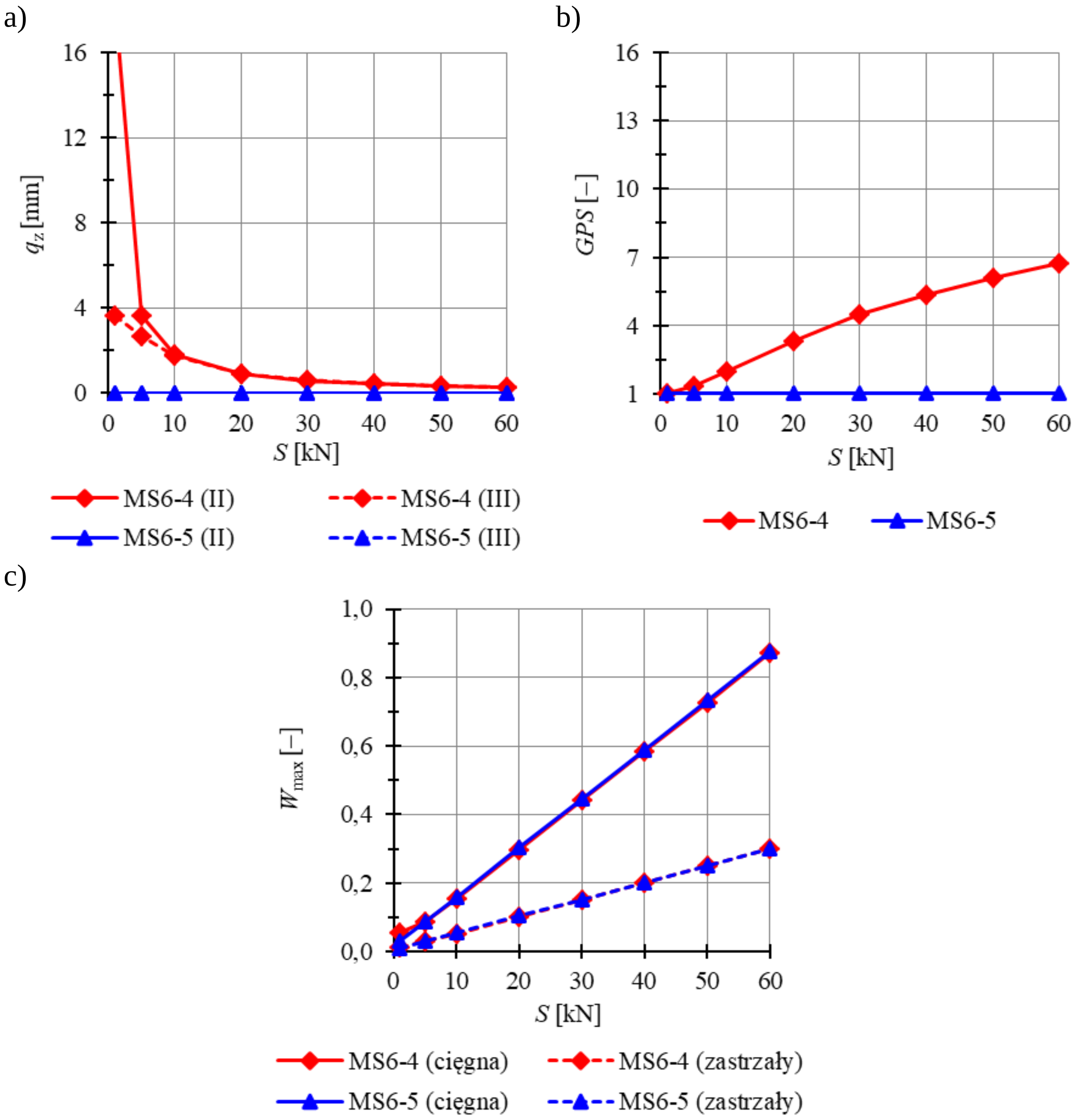
W celu przedstawienia różnicy w zachowaniu konstrukcji w zależności od występowania mechanizmu, porównano wyniki otrzymane dla modeli MS6-4 i MS6-5.

Przeanalizowano wpływ stanu samonaprężenia na:

- minimalne przemieszczenia węzłów w kierunku z (rys. 6.27a),
- globalny parametr sztywności GPS (rys. 6.27b),
- wytężenie elementów W_{max} (rys. 6.27c).

W tabeli 6.15 zawarto wybrane parametry statyczne otrzymane dla minimalnego i maksymalnego poziomu stanu samonaprężenia.

Dla modelu MS6-5 przemieszczenia analizowanych węzłów nie zależą od poziomu stanu samonaprężenia i są prawie równe zero, parametr GPS jest stały i równy 1, natomiast wytężenie elementów $W_{\max}$ zmienia się liniowo. Poziom stanu samonaprężenia nie ma wpływu na parametry statyczne modelu MS6-6, a zmiana wytężenia $W_{\max}$ jest powodowana wzrostem wielkości sił inicjowanych w elementach zwiększającym się poziomem sprężenia konstrukcji.



Rys. 6.27. Wpływ stanu samonaprężenia S na: a) minimalne przemieszczenie węzłów w kierunku z, b) globalny parametr sztywności GPS, c) wytężenie elementów W_{max} modeli MS6-4 i MS6-5

Tabela 6.16. *Charakterystyki wytrzymałościowe dla modeli MS6-4 i MS6-5*

S [kN]	**typ elementu**	*Model MS6-4* ($S_{\min} = 1$ kN)			*Model MS6-5* ($S_{\min} = 1$ kN)		
		N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]	N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]
$S_{\min}$	cięgna	6,1	0,055	1,0	3,3	0,030	1,0
	zastrzały	-2,3	0,011		-2,1	0,010	
60	cięgna	96,1	0,872	6,7	96,6	0,876	1,0
	zastrzały	-60,8	0,299		-61,1	0,300	

6.4.2. 10-modułowa płyta *modified Simplex*

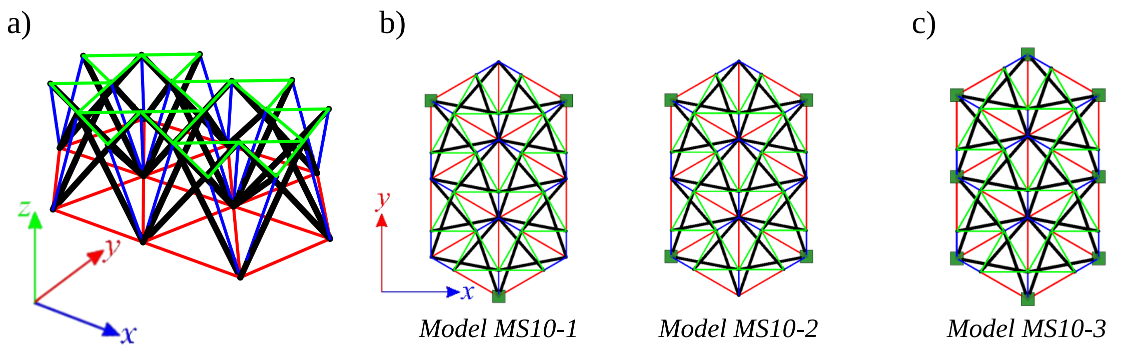
Kolejną rozpatrywaną konstrukcją jest płyta składająca się z 10 modułów *modified Simplex* (rys. 6.28a). Wszystkie analizowane struktury są kratownicami (***K***), zastrzały znajdują się wewnątrz układu elementów rozciąganych (***W***) o pomijalnie małej sztywności na ściskanie (***C***). We wszystkich rozpatrywanych 3 modelach wystąpiły stany samonaprężenia (***S***), których liczba zależy od liczby zablokowanych stopni swobody. Stabilność układu zapewniła superpozycja stanu naprężenia uzyskanego dla pojedynczej struktury. Modele MS10-1 i M10-2 ze względu na występowanie mechanizmu infinitezymalnego (***M***), zaliczono do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 1, natomiast pozostałe modele MS10-3 – MS10-5 – do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 2. Rezultaty analizy jakościowej 10-modułowych płyt *Simplex* przedstawiono w tabeli 5.4.2.

W dalszych rozważaniach skupiono się na modelach MS10-1 i MS10-2 (rys. 6.28b) oraz MS10-3 (rys. 6.28c). Rozpatrywane modele zostały obciążone siłami $P_{\mathrm{z}} = -1$ kN działającym w kierunku osi z, przyłożonymi do górnych węzłów konstrukcji, tj. węzłów 11-29.

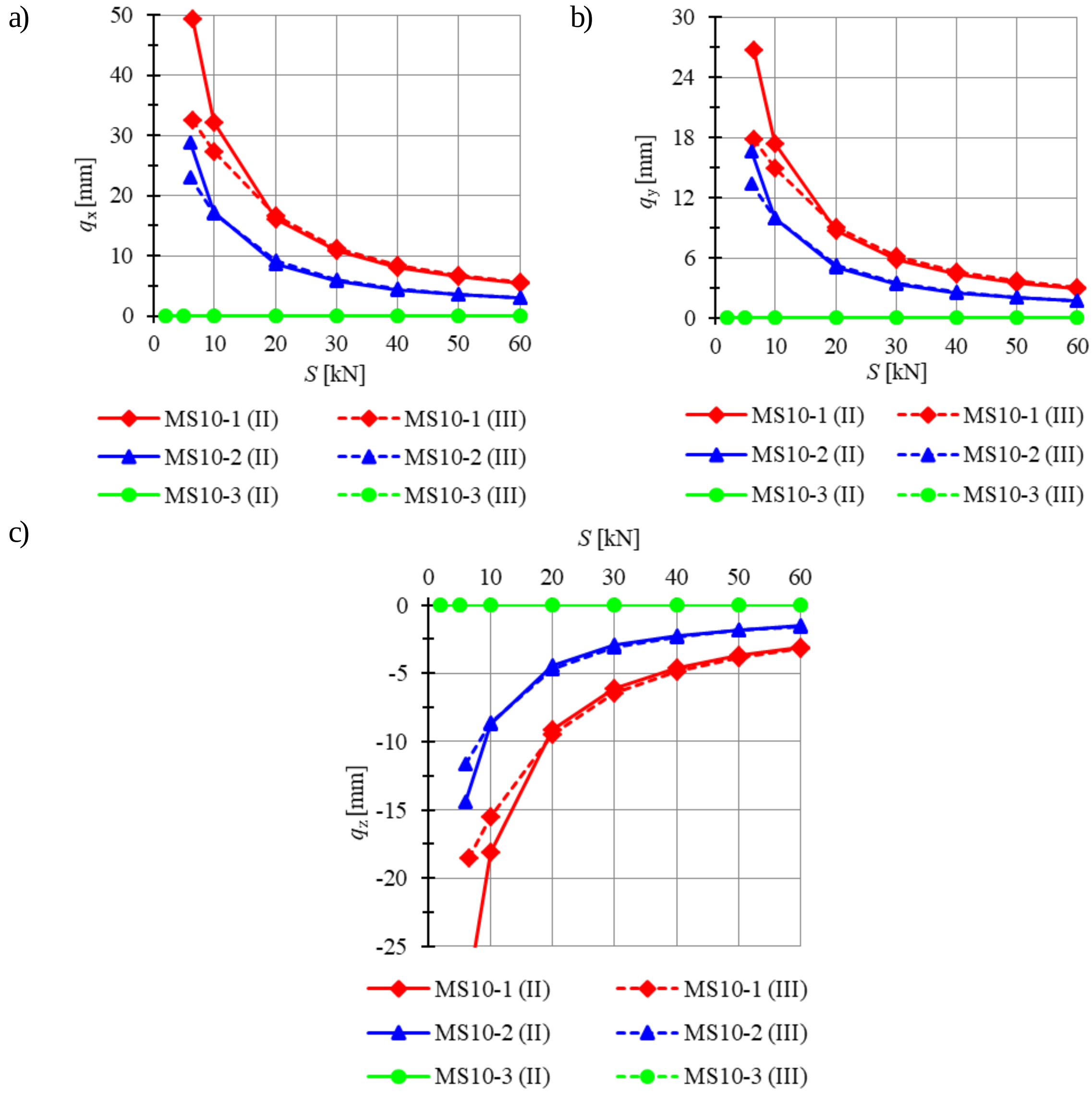
Przeanalizowano wpływ stanu samonaprężenia na:

- minimalne przemieszczenia węzłów w kierunku x (rys. 6.29a), y (rys. 6.29b) i z (rys. 6.29c),
- globalny parametr sztywności GPS (rys. 6.30a),
- wytężenie elementów W_{max} (rys. 6.30b).

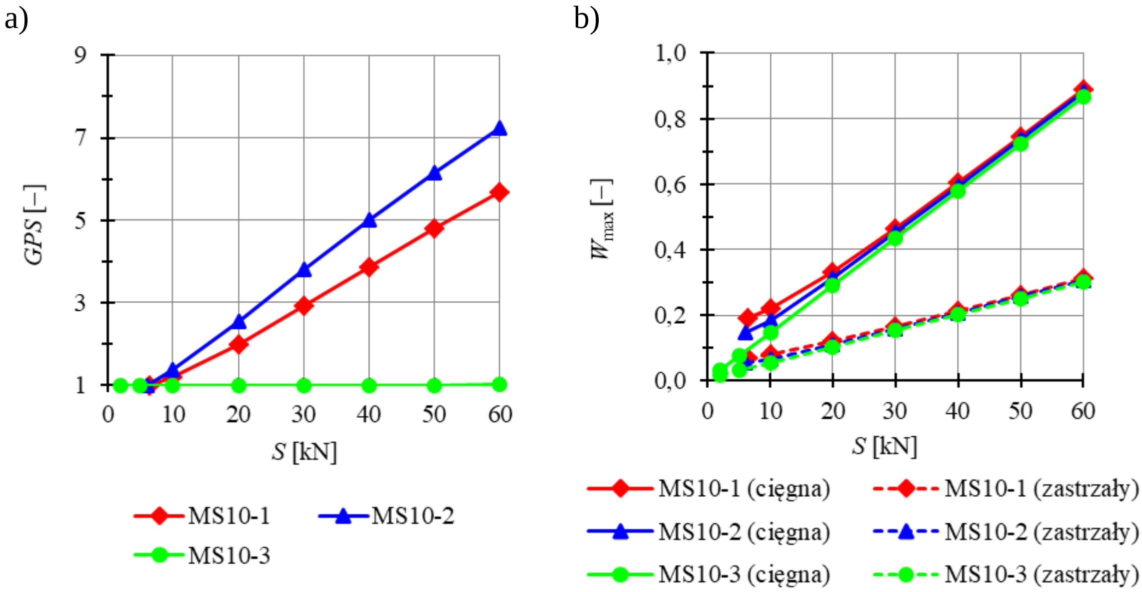
W tabeli 6.17 zawarto wybrane parametry statyczne otrzymane dla minimalnego i maksymalnego poziomu stanu samonaprężenia.



Rys. 6.28. a) Geometria 10-modułowej płyty *modified Simplex*, b) modele konstrukcji o cechach tensegrity klasy 1, c) model o cechach tensegrity klasy 2



Rys. 6.29. Wpływ stanu samonaprężenia na przemieszczenia: a) q_x, b) q_y, c) q_z modeli MS10-1 – MS10-3



Rys. 6.30. Wpływ stanu samonaprężenia S na: a) globalny parametr sztywności GPS, b) wytężenie elementów W_{max} modeli MS10-1 – MS10-3

Tabela 6.17. *Charakterystyki wytrzymałościowe dla modeli MS10-1 – MS10-3*

S [kN]	typ elementu	*Model MS10-1* ($S_{\min} = 6{,}5$ kN)			*Model MS10-2* ($S_{\min} = 6$ kN)			*Model MS10-3* ($S_{\min} = 2$ kN)		
		N_{max} [kN]	W_{max} [–]	GPS [–]	N_{max} [kN]	W_{max} [–]	GPS [–]	N_{max} [kN]	W_{max} [–]	GPS [–]
$S_{\min}$	cięgna	20,9	0,190	1,0	16,1	0,146	1,0	3,6	0,033	1,0
	zastrzały	-14,3	0,070		-10,9	0,054		-3,2	0,016	
60	cięgna	97,8	0,888	5,7	97,0	0,881	7,2	95,3	0,865	1,0
	zastrzały	-63,3	0,311		-62,1	0,305		-61,2	0,301	

Dla modelu MS10-1 wartość minimalnego poziomu stanu samonaprężenia wynosi $S_{\min} = 6{,}5$ kN, dla modelu MS10-2 - $S_{\min} = 6$ kN, natomiast dla modelu MS10-3 – $S_{\min} = 2$ kN. Dla modelu MS10-3 nie uzyskano różnic pomiędzy wynikami uzyskanymi przy zastosowaniu teorii drugiego (II) i trzeciego (III) rzędu ze względu na brak mechanizmu. W odróżnieniu od modeli 6-modułowych MS6-1 i MS6-2, podpartych analogicznie do MS10-1 i MS10-2, uzyskano znaczące różnice pomiędzy modelami. Dla modelu MS10-1 różnice pomiędzy przemieszczeniami uzyskanymi przy użyciu teorii drugiego i trzeciego rzędu są znaczące do poziomu stanu samonaprężenia $S = 20$ kN, a dla modelu MS10-2 – do $S = 10$ kN. Po przekroczeniu tych wartości wyniki są zbieżne dla obu modeli. Przykładowo, przy minimalnym poziomie stanu samonaprężenia $S_{\min}$ dla przemieszczeń w kierunku z dla modelu MS10-1 uzyskano błąd względny równy 50,0%, natomiast dla modelu MS10-2 – 24,0%. Kolejno, przy poziomie stanu samonaprężenia $S = 10$ kN, otrzymano odpowiednio błąd względny o wartościach 16,5% i 0,56%, a przy poziomie stanu samonaprężenia $S = 20$ kN – 3,63% i 5,75%.

Dla modelu MS10-3 wartość współczynnika GPS jest stała i wynosi 1. Dla modelu MS10-1 przyrost poziomu stanu samonaprężenia o 1 kN powoduje średni przyrost współczynnika GSP o 0.0890, a dla modelu MS10-2 – 0,1173.

Porównując uzyskane wartości wytężeń elementów, korzystniejsze wartości uzyskano dla modelu MS10-3, chociaż nie są to istotnie różnice. Zależność pomiędzy poziomem stanu samonaprężenia a wytężeniem elementów jest liniowa dla modelu S10-3, natomiast dla modeli MS10-1 i MS10-2 staje się coraz bardziej liniowa wraz ze wzrostem poziomu stanu samonaprężenia. Dla modelu MS10-1 cięgna są o 169,8% bardziej wytężone niż zastrzały przy minimalnym poziomie stanu samonaprężenia $S_{\min}$ i o 185,30% przy maksymalnym poziomie stanu samonaprężenia $S_{\max}$. Dla modelu MS10-2 powyższe różnice są równe odpowiednio 173,4% i 188,8%, a dla modelu MS10-3 – 110,4% i 187,7%.

6.4.3. 14-modułowa płyta *modified Simplex*

Następną rozważaną strukturą jest płyta składająca się z 14 modułów *Simplex* (rys. 6.31a). Wszystkie analizowane struktury są kratownicami (***K***), zastrzały znajdują się wewnątrz układu elementów rozciąganych (***W***) o pomijalnie małej sztywności na ściskanie (***C***). We wszystkich rozpatrywanych 3 modelach wystąpiły stany samonaprężenia (***S***), których liczba zależy od liczby zablokowanych stopni swobody. Stabilność układu zapewniła superpozycja stanu naprężenia uzyskanego dla pojedynczej struktury. Modele MS14-1 i M14-2 (rys. 6.31b) ze względu na występowanie mechanizmu infinitezymalnego (***M***), zaliczono do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 1, natomiast model MS14-3 (rys. 6.31) – do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 2. Rezultaty analizy jakościowej 14-modułowych płyt *modified Simplex* przedstawiono w 5.4.3.

Rozpatrywane modele zostały obciążone siłami $P_z = -1$ kN działającym w kierunku osi z, przyłożonymi do górnych węzłów konstrukcji, tj. węzłów 1-26.

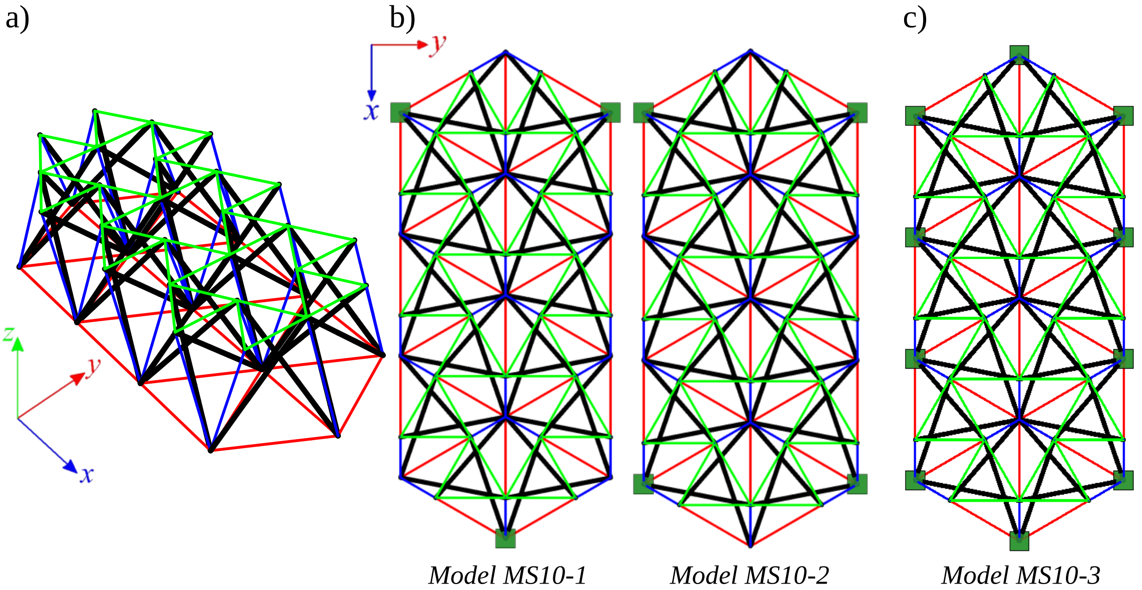
Przeanalizowano wpływ stanu samonaprężenia na:

– minimalne przemieszczenia węzłów w kierunku x (rys. 6.32a), y (rys. 6.32b) i z (rys. 6.32c),

– globalny parametr sztywności GPS (rys. 6.33a),

– wytężenie elementów W_{max} (rys. 6.33b).

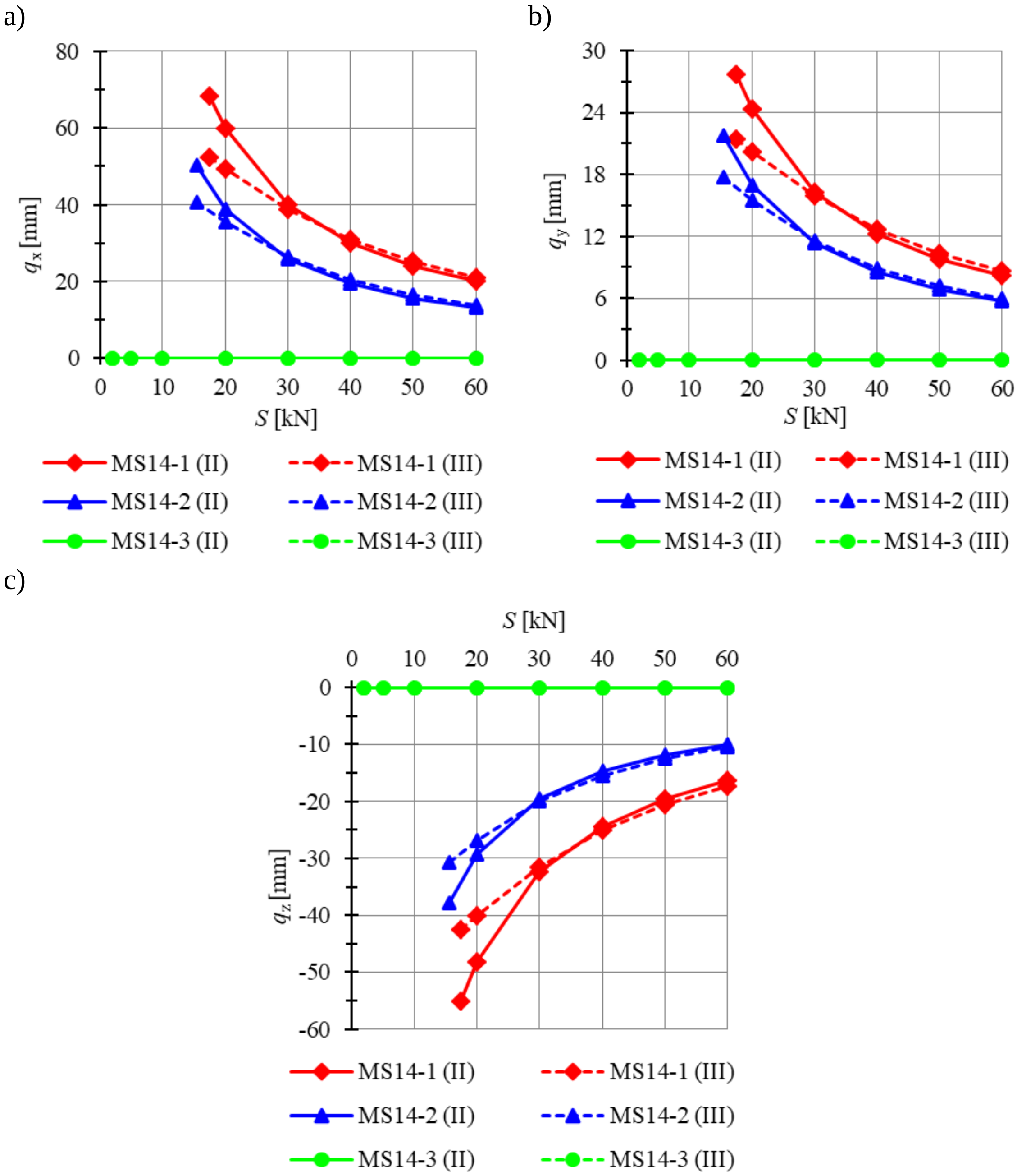
W tabeli 6.18 zawarto wybrane parametry statyczne otrzymane dla minimalnego i maksymalnego poziomu stanu samonaprężenia.



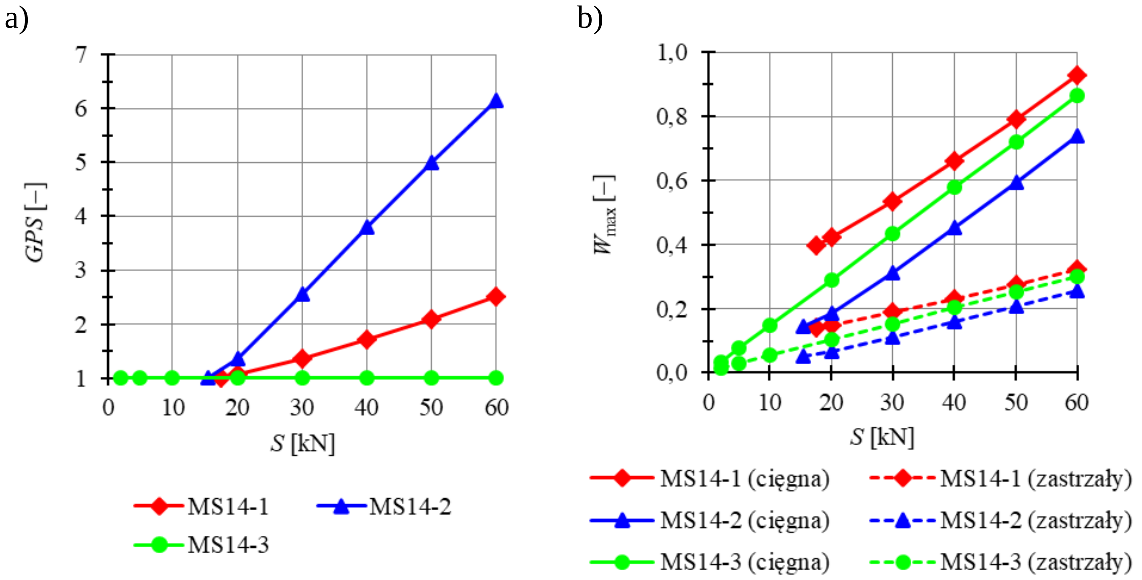
Rys. 6.31. a) Geometria 14-modułowej płyty *modified Simplex*, b) modele konstrukcji o cechach tensegrity klasy 1, c) model o cechach tensegrity klasy 2

Tabela 6.18. *Charakterystyki wytrzymałościowe dla modeli MS14-1 – MS14-3*

S [kN]	typ elementu	Model MS14-1 ($S_{\min} = 17{,}5$ kN) N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]	Model MS14-2 ($S_{\min} = 15{,}5$ kN) N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]	Model MS14-3 ($S_{\min} = 2$ kN) N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]
$S_{\min}$	cięgna	43,8	0,397	1,0	16,1	0,146	1,0	3,7	0,033	1,0
	zastrzały	-28,6	0,140		-10,9	0,054		-3,2	0,016	
60	cięgna	102,3	0,928	2,5	81,3	0,737	6,1	95,3	0,865	1,0
	zastrzały	-65,7	0,323		-52,1	0,256		-61,2	0,301	



Rys. 6.32. Wpływ stanu samonaprężenia na przemieszczenia: a) q_x, b) q_y, c) q_z modeli MS14-1 – MS14-3



Rys. 6.33. Wpływ stanu samonaprężenia S na: a) globalny parametr sztywności GPS, b) wytężenie elementów W_{max} modeli MS14-1 – MS14-3

Dla modelu MS14-1 wartość minimalnego poziomu stanu samonaprężenia wynosi $S_{\min} = 17{,}5$ kN, dla modelu MS14-2 - $S_{\min} = 15{,}5$ kN, natomiast dla modelu MS14-3 – $S_{\min} = 2$ kN. Dla modelu MS14-3 nie uzyskano różnic pomiędzy wynikami uzyskanymi przy zastosowaniu teorii drugiego (II) i trzeciego (III) rzędu ze względu na brak mechanizmu. Dla modeli MS14-1 i MS14-2 różnice pomiędzy przemieszczeniami uzyskanymi przy użyciu teorii drugiego i trzeciego rzędu są znaczące do poziomu stanu samonaprężenia $S = 30$ kN, a Po przekroczeniu tej wartości wyniki są zbieżne dla obu modeli. Przykładowo, przy minimalnym poziomie stanu samonaprężenia $S_{\min}$ dla przemieszczeń w kierunku z dla modelu MS14-1 uzyskano błąd względny równy 29,5%, natomiast dla modelu MS14-2 – 22,8%. Przy poziomie stanu samonaprężenia $S = 30$ kN, otrzymano odpowiednio błąd względny o wartościach 2,4% i 1,7%.

Dla modelu MS143 wartość współczynnika GPS jest stała i wynosi 1. Dla modelu MS14-1 przyrost poziomu stanu samonaprężenia o 1 kN powoduje średni przyrost współczynnika GSP o 0,0354, a dla modelu MS14-2 – 0,1177.

Porównując uzyskane wartości wytężeń elementów, korzystniejsze wartości uzyskano dla modelu MS14-2. Dla modelu MS14-3 zależność pomiędzy poziomem stanu samonaprężenia a wytężeniem elementów jest liniowa, natomiast dla modeli MS14-1 i MS14-2 staje się coraz bardziej liniowa wraz ze wzrostem poziomu stanu samonaprężenia. Dla modelu MS14-1 cięgna są o 183,2% bardziej wytężone niż zastrzały przy minimalnym poziomie stanu samonaprężenia $S_{\min}$ i o 187,7% przy maksymalnym poziomie stanu samonaprężenia $S_{\max}$. Dla modelu MS14-2 powyższe różnice są równe odpowiednio 173,4% i 188,2%, a dla modelu MS14-3 – 108,6% i 187,6%.

6.4.4. 18-modułowa płyta *modified Simplex*

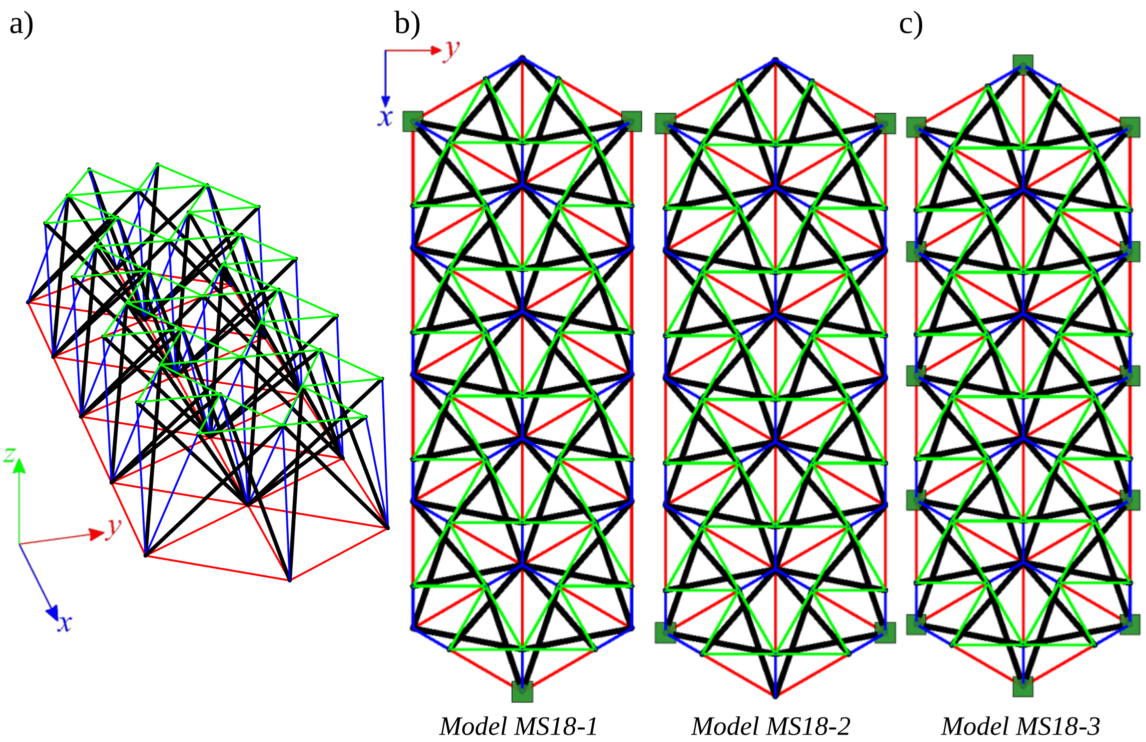
Kolejną rozpatrywaną strukturą jest płyta składająca się z 18 modułów *modified Simplex* (rys. 6.34a). Wszystkie analizowane struktury są kratownicami (***K***), zastrzały znajdują się wewnątrz układu elementów rozciąganych (***W***) o pomijalnie małej sztywności na ściskanie (***C***). We wszystkich rozpatrywanych 3 modelach wystąpiły stany samonaprężenia (***S***), których liczba zależy od liczby zablokowanych stopni swobody. Stabilność układu zapewniła superpozycja stanu naprężenia uzyskanego dla pojedynczej struktury. Modele MS18-1 i M18-2 (rys. 6.34b) ze względu na występowanie mechanizmu infinitezymalnego (***M***), zaliczono do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 1, natomiast model MS14-3 (rys. 6.34c) – do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 2. Rezultaty analizy jakościowej 14-modułowych płyt *modified Simplex* przedstawiono w 5.4.4.

Rozpatrywane modele zostały obciążone siłami $P_{\mathrm{z}} = -1$ kN działającym w kierunku osi z, przyłożonymi do górnych węzłów konstrukcji, tj. węzłów 17-49.

Przeanalizowano wpływ stanu samonaprężenia na:

- minimalne przemieszczenia węzłów w kierunku x (rys. 6.35a), y (rys. 6.35b) i z (rys. 6.35c),
- globalny parametr sztywności GPS (rys. 6.36a),
- wytężenie elementów W_{max} (rys. 6.36b).

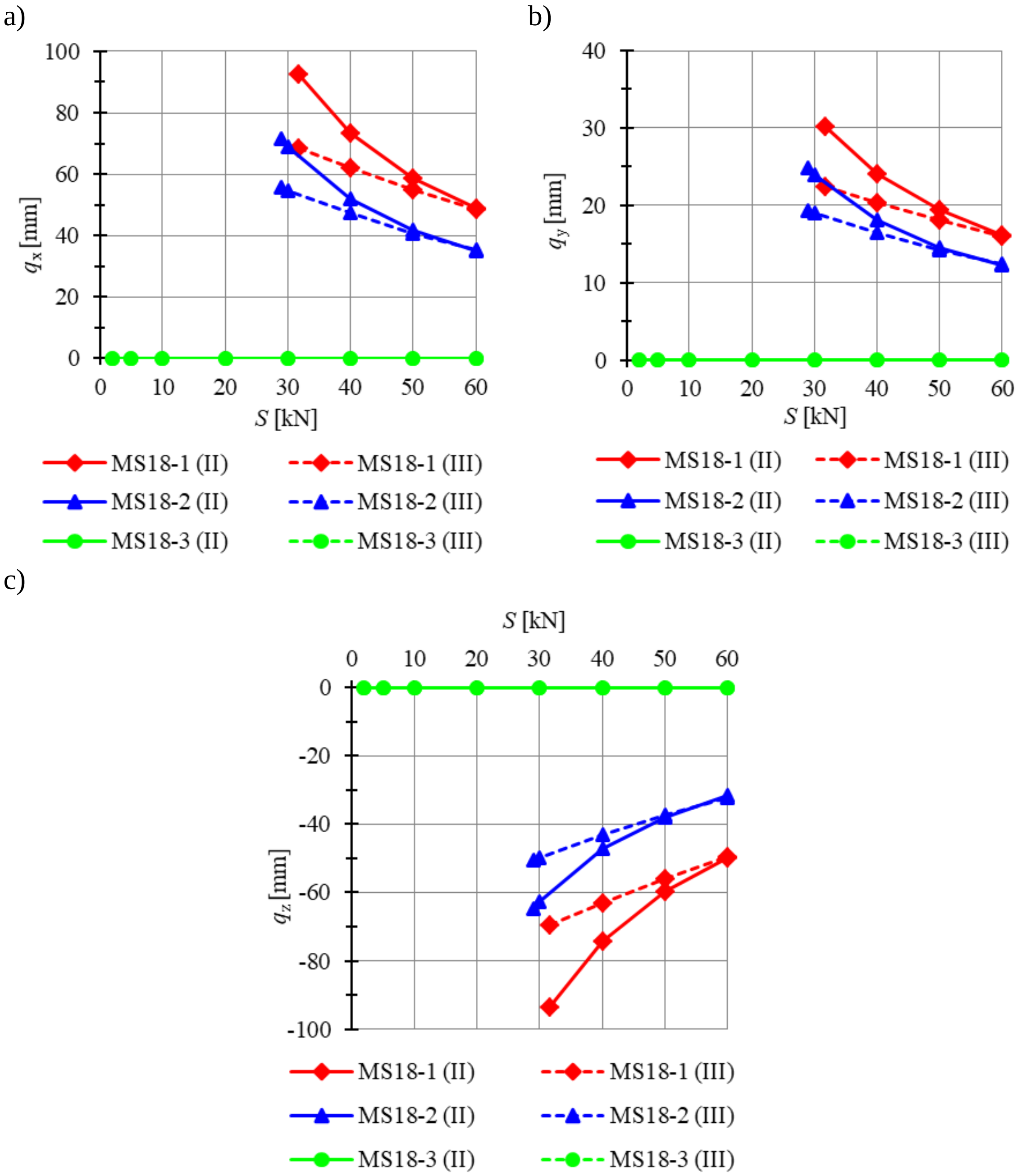
W tabeli 6.19 zawarto wybrane parametry statyczne otrzymane dla minimalnego i maksymalnego poziomu stanu samonaprężenia.



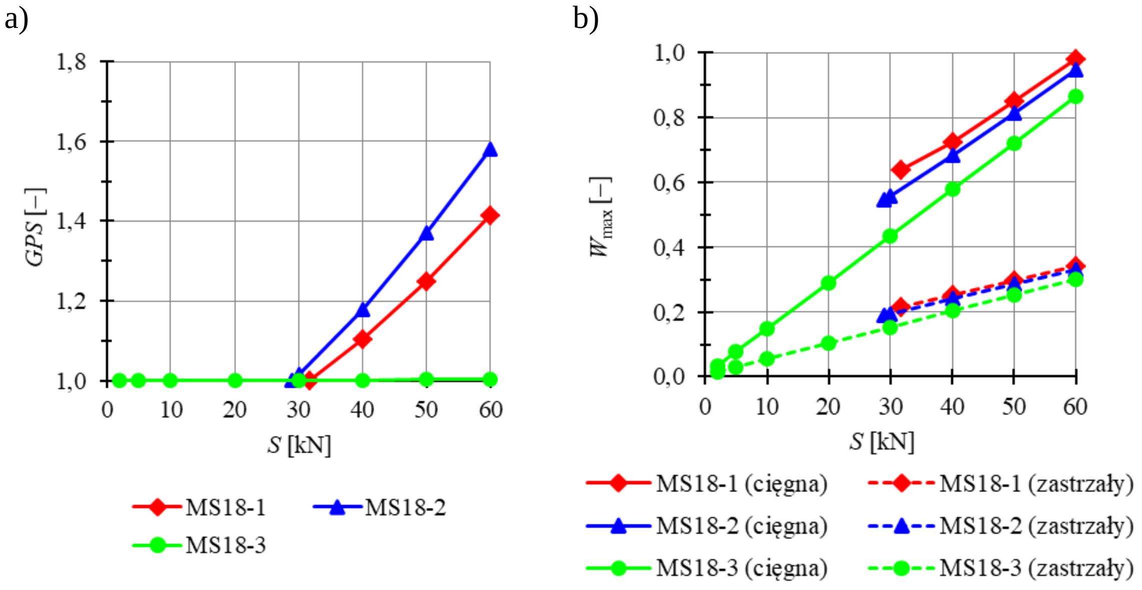
Rys. 6.34. a) Geometria 18-modułowej płyty *modified Simplex*, b) modele konstrukcji o cechach tensegrity klasy 1, c) model o cechach tensegrity klasy 2

Tabela 6.19. *Charakterystyki wytrzymałościowe dla modeli MS18-1 – MS18-3*

S **[kN]**	**typ elementu**	*Model MS18-1* ($S_{\text{min}} = 31{,}6$ kN)			*Model MS18-2* ($S_{\text{min}} = 29$ kN)			*Model MS18-3* ($S_{\text{min}} = 2$ kN)		
		N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]	N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]	N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]
S_{min}	cięgna	70,6	0,640	1,0	60,0	0,544	1,0	3,7	0,033	1,0
	zastrzały	-43,9	0,216		-38,7	0,190		-3,2	0,016	
60	cięgna	108,2	0,982	1,4	104,6	0,949	1,6	95,3	0,865	1,0
	zastrzały	-69,5	0,342		-67,4	0,331		-61,2	0,301	



Rys. 6.35. Wpływ stanu samonaprężenia na przemieszczenia modeli MS18-1 – MS18-3: a) q_x, b) q_y, c) q_z



Rys. 6.36. Wpływ stanu samonaprężenia S na: a) globalny parametr sztywności GPS, b) wytężenie elementów W_{max} modeli MS18-1 – MS18-3

Dla modelu MS18-1 wartość minimalnego poziomu stanu samonaprężenia wynosi $S_{\min} = 31{,}6$ kN, dla modelu MS18-2 - $S_{\min} = 29$ kN, natomiast dla modelu MS18-3 – $S_{\min} = 2$ kN. Dla modelu MS18-3 nie uzyskano różnic pomiędzy wynikami uzyskanymi przy zastosowaniu teorii drugiego (II) i trzeciego (III) rzędu ze względu na brak mechanizmu. Przykładowo, przy minimalnym poziomie stanu samonaprężenia $S_{\min}$ dla przemieszczeń w kierunku z dla modelu MS18-1 uzyskano błąd względny równy 34,5%, natomiast dla modelu MS18-2 – 28,1%. Przy maksymalnym poziomie stanu samonaprężenia $S_{\max}$, otrzymano odpowiednio błąd względny o wartościach 0,58% i 1,9%.

Dla modelu MS18-3 wartość współczynnika GPS jest stała i wynosi 1. Dla modelu MS18-1 przyrost poziomu stanu samonaprężenia o 1 kN powoduje średni przyrost współczynnika GSP o 0,0186, a dla modelu MS18-2 – 0,10146.

Porównując uzyskane wartości wytężeń elementów, korzystniejsze wartości uzyskano dla modelu MS18-3, dla którego zależność pomiędzy poziomem stanu samonaprężenia a wytężeniem elementów jest liniowa. Dla modeli MS18-1 i MS18-2 zależność pomiędzy poziomem stanu samonaprężenia a wytężeniem elementów staje się coraz bardziej liniowa wraz ze wzrostem poziomu stanu samonaprężenia. Dla modelu MS18-1 cięgna są o 197,1% bardziej wytężone niż zastrzały przy minimalnym poziomie stanu samonaprężenia $S_{\min}$ i o 187,5% przy maksymalnym poziomie stanu samonaprężenia $S_{\max}$. a dla modelu MS18-3 – 109,6% i 187,7%. Dla modelu MS18-2 cięgna są o średnio 186,2% bardziej wytężone niż zastrzały dla wszystkich poziomów stanu samonaprężenia.

6.4.5. 24-modułowa płyta *modified Simplex*

Ostatnią rozpatrywaną strukturą, składającą się z modułów *modified Simplex*, jest płyta składająca się z 24 modułów x (rys. 6.37a). Wszystkie analizowane struktury są kratownicami (***K***), zastrzały znajdują się wewnątrz układu elementów rozciąganych (***W***) o pomijalnie małej sztywności na ściskanie (***C***). We wszystkich rozpatrywanych 3 modelach wystąpiły stany samonaprężenia (***S***), których liczba zależy od liczby zablokowanych stopni swobody. Stabilność układu zapewniła superpozycja stanu naprężenia uzyskanego dla pojedynczej struktury. Modele MS24-1 – MS24-4 (rys. 6.37b) ze względu na występowanie mechanizmu infinitezymalnego (***M***), zaliczono do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 1, natomiast modele MS24-5 – MS24-7 – do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 2. Rezultaty analizy jakościowej 24-modułowych płyt *modified Simplex* przedstawiono w 5.4.4.

Rozpatrywane modele zostały obciążone siłami $P_{\mathrm{z}} = -1$ kN działającym w kierunku osi z, przyłożonymi do górnych węzłów konstrukcji, tj. węzłów 20-60.

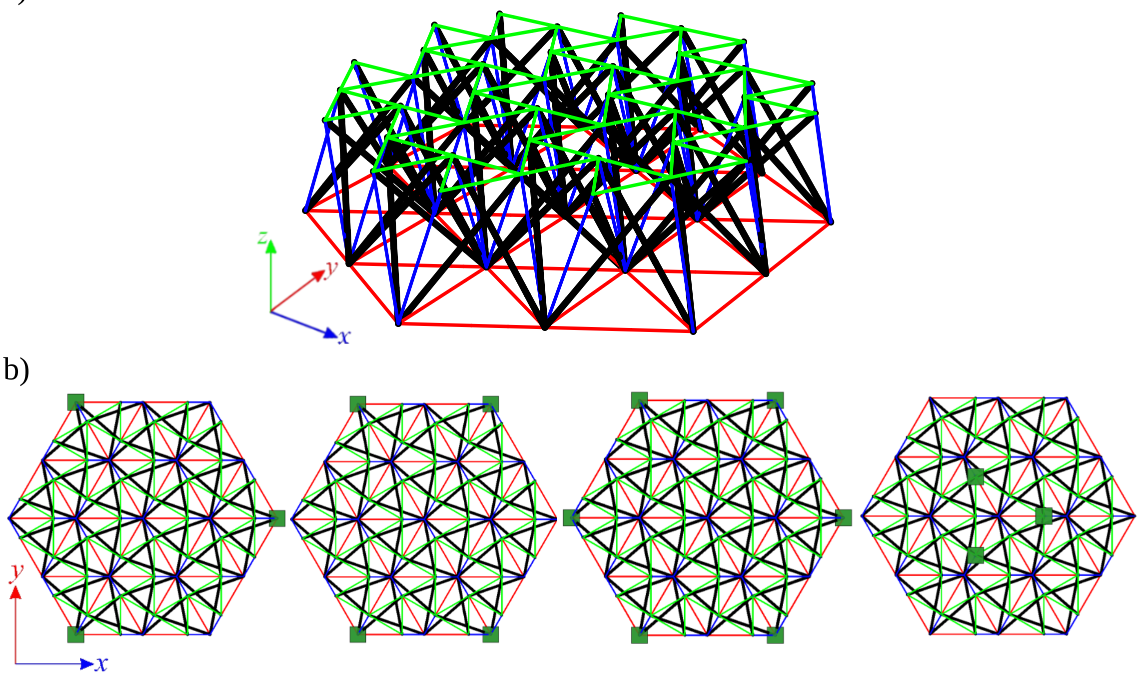
Przeanalizowano wpływ stanu samonaprężenia na:

- minimalne przemieszczenia węzłów w kierunku x (rys. 6.38a), y (rys. 6.38b) i z (rys. 6.38c),
- globalny parametr sztywności GPS (rys. 6.39a),
- wytężenie elementów W_{max} (rys. 6.39b).

W tabelach 6.20 i 6.21 zawarto wybrane parametry statyczne otrzymane dla minimalnego i maksymalnego poziomu stanu samonaprężenia.

a)

b)



Model MS24-1 *Model MS24-2* *Model MS24-3* *Model MS24-4*

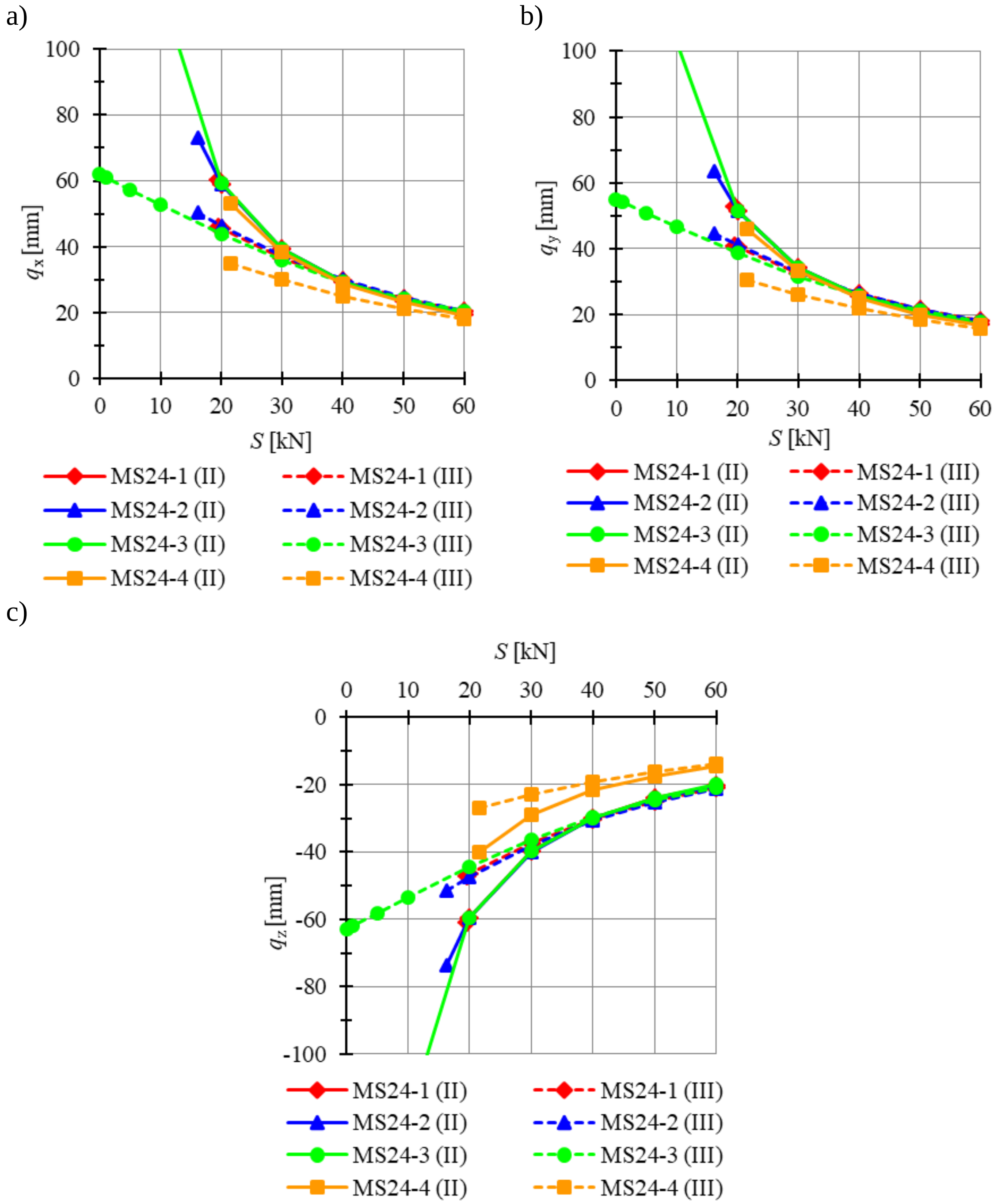
Rys. 6.37. a) Geometria 24-modułowej płyty *modified Simplex*, b) modele konstrukcji o cechach tensegrity klasy 1

Tabela 6.20. *Charakterystyki wytrzymałościowe dla modeli MS24-1 i MS24-2*

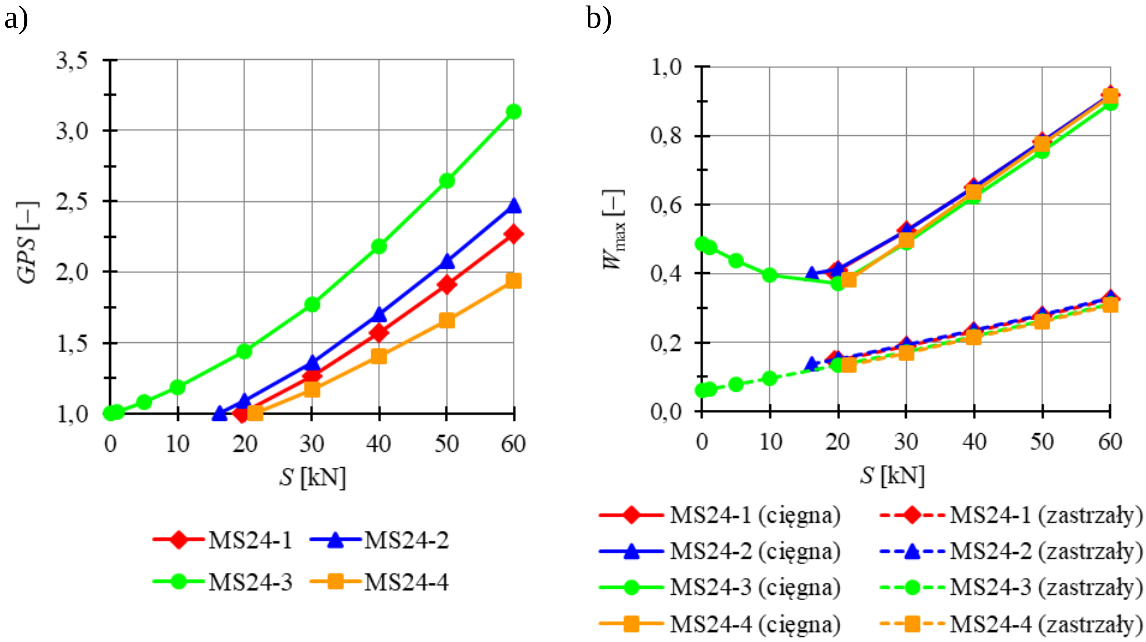
***S* [kN]**	**typ elementu**	*Model MS24-1* ($S_{\min} = 19{,}5$ kN)			*Model MS24-2* ($S_{\min} = 16{,}2$ kN)		
		N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]	N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]
$S_{\min}$	cięgna	44,6	0,405	1,0	44,2	0,401	1,0
	zastrzały	-29,9	0,147		-28,2	0,139	
60	cięgna	101,1	0,918	2,3	101,1	0,918	2,5
	zastrzały	-66,0	0,324		-66,9	0,329	

Tabela 6.21. *Charakterystyki wytrzymałościowe dla modeli MS24-3 i MS24-4*

***S* [kN]**	**typ elementu**	*Model MS24-3* ($S_{\min} = 0{,}01$kN)			*Model MS24-4* ($S_{\min} = 21{,}6$ kN)		
		N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]	N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]
$S_{\min}$	cięgna	53,5	0,485	1,0	42,2	0,383	1,0
	zastrzały	-12,7	0,062		-27,3	-0,134	
60	cięgna	98,4	0,893	3,1	101,0	0,916	1,9
	zastrzały	63,3	0,311		62,8	0,309	



Rys. 6.38. Wpływ stanu samonaprężenia na przemieszczenia: a) q_x, b) q_y, c) q_z modeli MS24-1 – MS24-4



Rys. 6.39. Wpływ stanu samonaprężenia S na: a) globalny parametr sztywności GPS, b) wytężenie elementów W_{max} modeli MS24-1 – MS24-4

Najwyższą wartość minimalnego poziomu samonaprężenia uzyskano dla modelu MS24-4 – $S_{\min} = 21{,}6$ kN, najniższą natomiast dla modelu MS24-3 – $S_{\min} = 0{,}01$ kN. Dla modelu MS24-1 wartość minimalnego poziomu stanu samonaprężenia wynosi $S_{\min} = 19{,}5$ kN, a dla modelu MS24-2 - $S_{\min} = 16{,}2$ kN. Dla analizowanych modeli uzyskano znaczącą różnice pomiędzy przemieszczenia obliczonymi zgodnie z teorią II i III rzędu. Przykładowo, dla minimalnego poziomu samonaprężenia dla modelu MS24-1 uzyskano błąd względy równy 30,0%, dla MS24-2 – 43,1%, dla MS24-3 – $1{,}87 \cdot 10^5$%, a dla MS24-4 – 48,5%. Wraz ze wzrostem poziomu sprężenia różnice maleją i tak dla maksymalnego poziomu sprężenia uzyskano kolejno błąd względny równy 4,7%, 5,1%, 6,9% oraz 4,3%.

Najkorzystniejszą wartość współczynnika GPS uzyskano dla modelu MS24-3. Dla tego modelu przyrost poziomu stanu samonaprężenia o 1 kN powoduje średni przyrost współczynnika GSP o 0,0347. Dla modelu MS24-1 przyrost poziomu stanu samonaprężenia o 1 kN powoduje średni przyrost współczynnika GSP o 0,0335, dla MS24-2 – 0,0311, natomiast dla MS24-4 – 0,0244.

Porównując uzyskane wartości wytężeń elementów, najkorzystniejsze wartości uzyskano dla modelu MS24-3. Dla tego modelu wytężenie cięgien maleje wraz ze wzrostem poziomu stanu samonaprężenia do wartości $S = 20$ kN, a następnie znów rośnie. Dla wszystkich modeli bardziej wytężonym elementem są cięgna. Różnica w poziomie wytężenia cięgien i zastrzałów rośnie wraz ze wzrostem poziomu sprężenia dla modeli MS24-1 i MS24-4, natomiast dla modeli MS24-2 i MS24-3 – maleje. Dla minimalnego poziomu stanu samonaprężenia cięgna są wytężone bardziej o 175,4% dla modelu MS24-1, 189,0% dla modelu MS24-2, 679,2% dla MS24-3 i 185,1% dla MS24-4. Dla maksymalnego poziomu stanu samonaprężenia powyższe różnice są równe kolejno 182,8%, 179,2%, 187,0% i 196,8%.

6.5. Struktury zbudowane z modułu *Quartex*

Kolejną rozważaną grupą konstrukcji są struktury zbudowane z modułu *Quartex*. Długość zastrzałów dla struktur zbudowanych z tego modułu wynosi $L = 1{,}65$ m, a ich nośność – $N_{b,Rd} = 183{,}7$ kN. Maksymalna siła sprężenia w cięgnach wynosi $N_{max} = 0{,}691 \cdot S$. Rozpatrzone zostaną płyty składające się z czterech, ośmiu, szesnastu i sześćdziesięciu czterech modułów oraz pasmo płytowe. Minimalny stan samonaprężenia został przyjęty tak, aby zapewnić właściwą identyfikację elementów struktury i różni się w zależności od przyjętego schematu statycznego, natomiast maksymalny stan samonaprężenia założono równy $S_{\max} = 140$ kN, odpowiadający maksymalnemu wytężeniu cięgien na poziomie 94,1%.

6.5.1. 4-modułowa płyta *Quartex*

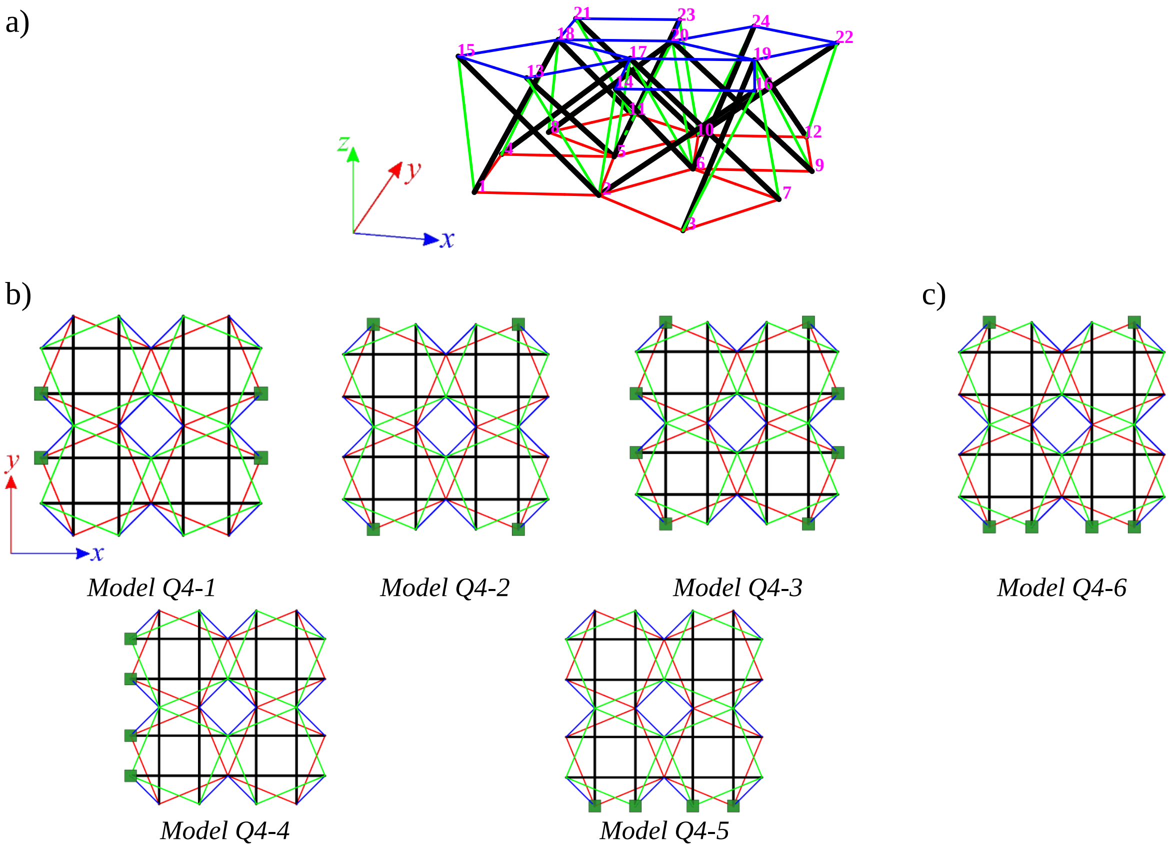
Pierwszą w kolejności rozważaną strukturą zbudowaną z modułów *Quartex* jest płyta 4-modułowa. Rozpatrzono 10 modeli różniących się sposobem podparcia (5.5.1). Wszystkie analizowane struktury są kratownicami (***K***), zastrzały znajdują się wewnątrz układu elementów rozciąganych (***W***) o pomijalnie małej sztywności na ściskanie (***C***). We wszystkich rozpatrywanych 10 modelach wystąpiły stany samonaprężenia (***S***), których liczba zależy od liczby zablokowanych stopni swobody. Otrzymane stany samonaprężenia nie definiują jednoznacznie elementów konstrukcji, dopiero uwzględnienie stanu samonaprężenia pojedynczego modułu pozwoliło zidentyfikować rodzaje elementów. W związku z powyższym, modele Q4-1 – Q4-6 (rys.6.40b), charakteryzujące się występowaniem mechanizmu infinitezymalnego (***M***), zaliczono do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 1, natomiast modele Q4-7 – Q4-9 (rys.6.40c) ze względu na brak mechanizmu – do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 2. Analizę ilościową płyt 4-modułowych zbudowanych z modułów *Quartex* opisano w 5.5.1. W rozdziale skupiono się na modelach, w których występuje mechanizm infinitezymalny. Do dalszych rozważań przyjęto modele Q4-1 – Q4-5. Dodatkowo, aby przedstawić wpływ występowania mechanizmu infinitezymalnego na pracę konstrukcji, przedstawiono także rezultaty otrzymane dla modelu Q4-6.

Wszystkie rozpatrywane modele zostały obciążone siłami $P_z = -1$ kN działającym w kierunku osi z, przyłożonymi do górnych węzłów konstrukcji, tj. węzłów 14-22.

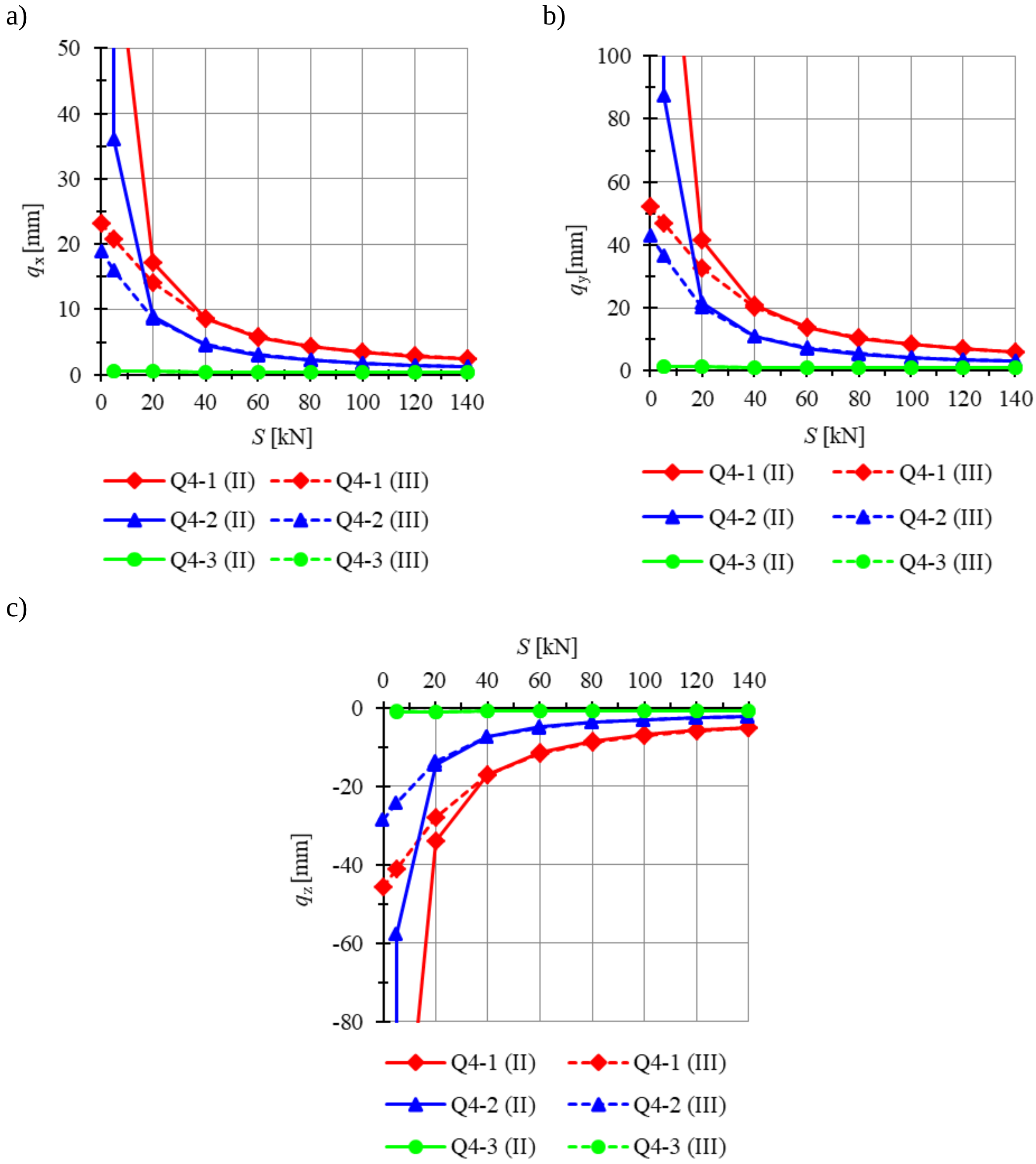
Najpierw porównano pierwsze trzy modele, tj. modele ze swobodnym podparciem krawędzi (Q4-1 – Q4-3). Przeanalizowano wpływ stanu samonaprężenia na:

- minimalne przemieszczenia węzłów w kierunku x (rys. 6.41a), y (rys. 6.41b) i z (rys. 6.41c),
- globalny parametr sztywności GPS (rys. 6.42a),
- wytężenie elementów W_{max} (rys. 6.42b).

W tabeli 6.22 zawarto wybrane parametry statyczne otrzymane dla minimalnego i maksymalnego poziomu stanu samonaprężenia.



Rys. 6.40. a) geometria 4-modułowej płyty *Quartex*, b) modele konstrukcji o cechach tensegrity klasy 1, c) modele o cechach tensegrity klasy 2

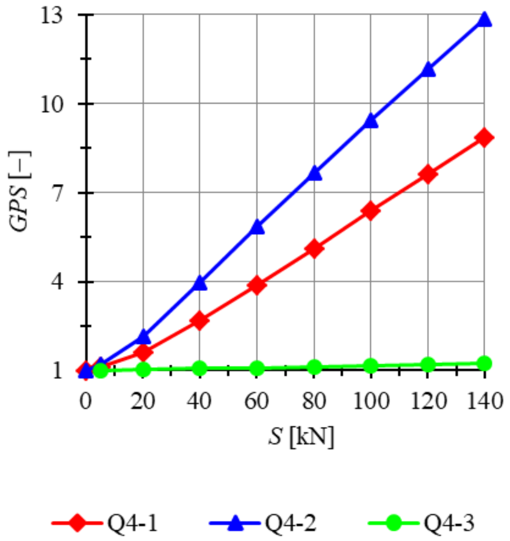


Rys. 6.41. Wpływ stanu samonaprężenia na maksymalne przemieszczenia w kierunku: a) x, b) y, c) z dla modeli Q4-1 – Q4-3

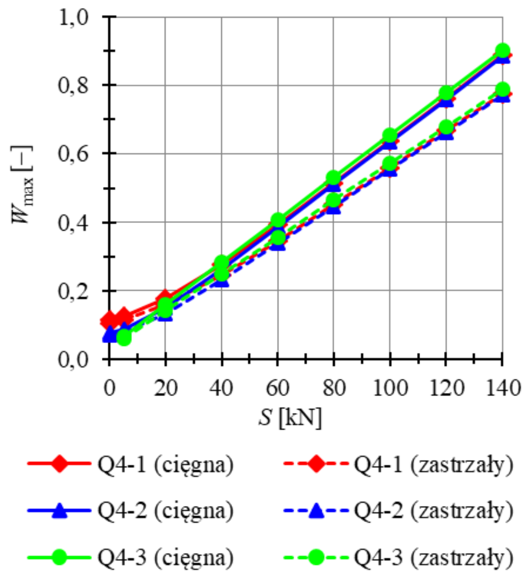
Tabela 6.22. *Charakterystyki wytrzymałościowe dla modeli Q4-1 –Q4-3*

S [kN]	typ elementu	*Model Q4-1* (S_{min} = 0,01 kN)			*Model Q4-2* (S_{min} = 0,01 kN)			*Model Q4-3* (S_{min} = 5 kN)		
		N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]	N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]	N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]
S_{min}	cięgna	12,6	0,114	1,0	8,4	0,077	1,0	7,1	0,064	1,0
	zastrzały	19,4	0,106		12,9	0,070		11,2	0,061	
140	cięgna	97,9	0,888	8,9	97,5	0,884	12,8	99,6	0,904	1,2
	zastrzały	142,7	0,777		141,8	0,771		144,9	0,789	

a)



b)



Rys. 6.42. Wpływ stanu samonaprężenia S na: a) globalny parametr sztywności GPS, b) wytężenie elementów W_{max} modeli Q4-1 – Q4-3

W przypadku modeli płyt swobodnie podpartych na dwóch krawędziach, tj. Q4-1 – Q4-2, wartość minimalnego poziomu stanu samonaprężenia wynosi $S_{\mathrm{min}} = 0{,}01$ kN. Dla modelu Q4-3 minimalny poziom stanu samonaprężenia wynosi $S_{\mathrm{min}} = 5$ kN.

W przypadku przemieszczeń, rezultaty otrzymane przy zastosowaniu teorii drugiego (II) rzędu znacznie różnią się od wyników otrzymanych przy użycie teorii (III) rzędu dla modeli Q4-1 i Q4-2 dla niskich poziomów stanu samonaprężenia. Dla modelu Q4-3 różnice pomiędzy przemieszczeniami są niewielki niezależnie od poziomu stanu samonaprężenia. Przykładowo, dla minimalnego poziomu stanu samonaprężenia błąd względny dla maksymalnego przemieszczenia w kierunku y (rys. 6.41b) wynosi kolejno dla rozpatrywanych modeli Q-1 – Q-3 $1{,}6 \cdot 10^5\%$, $1{,}0 \cdot 10^5\%$ i $0{,}22\%$. Dla maksymalnego poziomu stanu samonaprężenia, błąd względny dla przemieszczenia w kierunku y jest równy stosownie 0,58%, 0,72 % i 0,16%.

Porównując dane zawarte w tabeli 6.22 i na rysunku 6.42a można stwierdzić, że model Q4-2 jest najsztywniejszy. Przyrost poziomu stanu samonaprężenia o 1 kN powoduje średni przyrost współczynnika GSP o 0,0868 dla tego modelu. Dla modelu Q4-1 ten sam przyrost poziomu stanu samonaprężenia powoduje średni przyrost GPS o 0,0573, natomiast dla modelu Q4-3 – o 0,0018. Porównując uzyskane wartości przemieszczeń, model Q4-3 jest znacznie sztywniejszy niż modele Q4-1 i Q4-2. Porównując kierunek podparcia, model Q4-2 jest znacznie sztywniejszy niż Q-1.

Wartości maksymalnych wytężeń elementów konstrukcji są porównywalne dla wszystkich modeli (rys. 6.42b). Dla niskich poziomów stanu samonaprężenia, najbardziej wytężone są elementy modelu Q4-1 – dla minimalnego poziomu cięgna Q4-1 są o bardziej wytężone o 3,8 punktu procentowego od Q4-2 i o 4,9 punktu procentowego od Q4-3, natomiast zastrzały – odpowiednio o 3,5 i 4,8 punktu procentowego. Przy maksymalnym poziomie stanu samonaprężenia najwyższe maksymalne wytężenia uzyskano dla modelu Q4-3 – cięgna są odpowiednio o 1,6 oraz 1,9 punktu procentowego bardziej wytężone niż dla modeli Q4-1 i Q4-2, natomiast zastrzały – odpowiednio o 1,2 i 1,7 punktu procentowego. Dla modeli Q4-1 – Q-3 cięgna są bardziej wytężone niż zastrzały. Przykładowo, dla modelu Q4-3 cięgna są o 6,7% bardziej wytężone niż zastrzały przy minimalnym poziomie stanu samonaprężenia S_{min} i o 14,6% przy maksymalnym poziomie stanu samonaprężenia S_{max}.

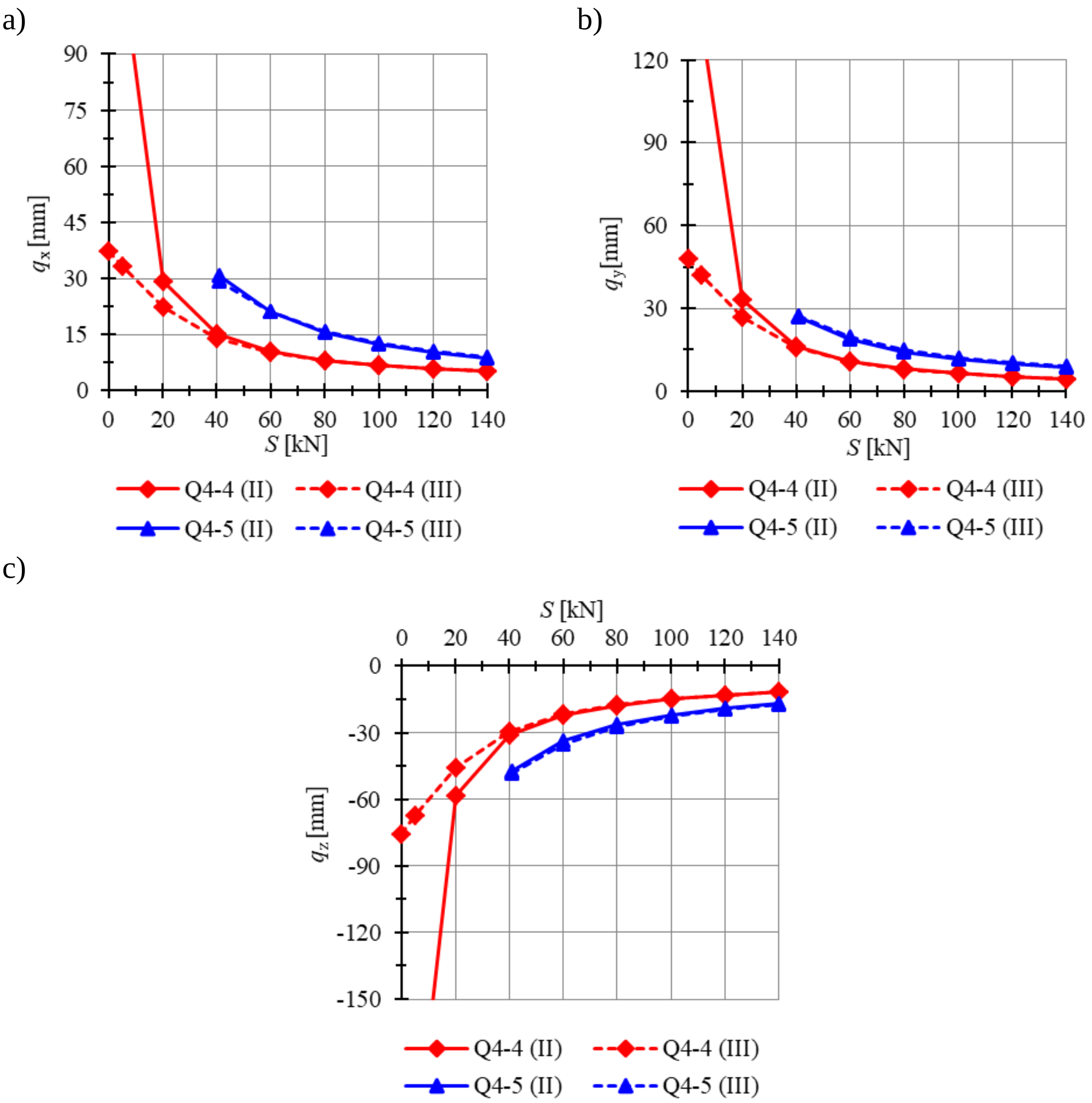
W następnym kroku porównano modele Q4-4 i Q4-5, tj. modele wspornikowe. Przeanalizowano wpływ stanu samonaprężenia na:

- minimalne przemieszczenia węzłów w kierunku x (rys. 6.43a), y (rys. 6.43b) i z (rys. 6.43c),
- globalny parametr sztywności GPS (rys. 6.44a),
- wytężenie elementów W_{max} (rys. 6.44b).

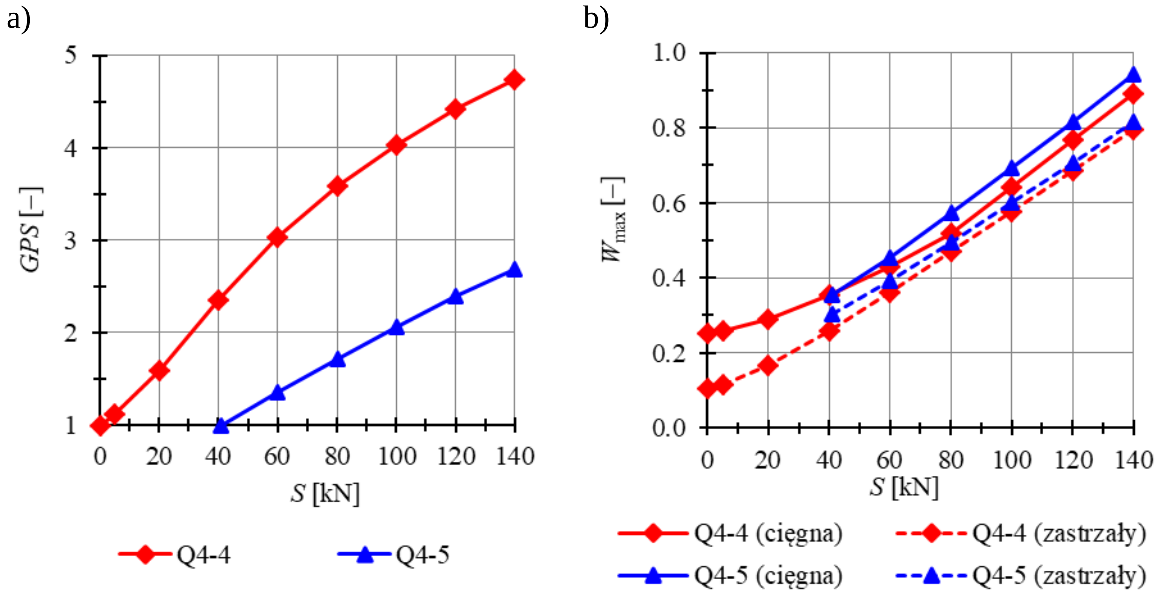
W tabeli 6.23 zawarto wybrane parametry statyczne otrzymane dla minimalnego i maksymalnego poziomu stanu samonaprężenia.

Tabela 6.23. *Charakterystyki wytrzymałościowe dla modeli Q4-4 i Q4-5*

S [kN]	**typ elementu**	*Model Q4-4* ($S_{\min} = 0{,}01$ kN)			*Model Q4-5* ($S_{\min} = 41$ kN)		
		N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]	N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]
$\boldsymbol{S_{\min}}$	cięgna	27,7	0,251	1,0	38,9	0,353	1,0
	zastrzały	19,4	0,106		55,9	0,304	
140	cięgna	98,3	0,892	4,7	103,7	0,941	2,7
	zastrzały	146,1	0,795		149,6	0,814	



Rys. 6.43. Wpływ stanu samonaprężenia na maksymalne przemieszczenia w kierunku: a) x, b) y, c) z dla modeli Q4-4 i Q4-5



Rys. 6.44. Wpływ stanu samonaprężenia S na: a) globalny parametr sztywności GPS, b) wytężenie elementów W_{max} modeli Q4-4 i Q4-5

W przypadku modeli płyt wspornikowych, wartość minimalnego poziomu stanu samonaprężenia wynosi $S_{\min} = 0{,}01$ kN dla modelu Q4-4 i $S_{\min} = 41$ kN dla modelu Q4-5.

W przypadku przemieszczeń, rezultaty otrzymane przy zastosowaniu teorii drugiego (II) rzędu znacznie różnią się od wyników otrzymanych przy użycie teorii (III) rzędu dla modelu Q4-4 dla niskich poziomów stanu samonaprężenia. Dla modelu Q4-5 różnice pomiędzy przemieszczeniami są niewielkie niezależnie od poziomu stanu samonaprężenia. Przykładowo, dla minimalnego poziomu stanu samonaprężenia błąd względny dla maksymalnego przemieszczenia w kierunku z (rys. 6.43c) wynosi kolejno dla rozpatrywanych modeli Q4-4 i Q4-5 $1{,}2 \cdot 10^5\%$ i $4{,}75\%$. Dla maksymalnego poziomu stanu samonaprężenia, błąd względny dla przemieszczenia w kierunku z jest równy stosownie 1,01% i 1,43%.

Porównując dane zawarte w tabeli 6.23 i na rysunku 6.44a można stwierdzić, że model Q4-4 jest sztywniejszy. Przyrost poziomu stanu samonaprężenia o 1 kN powoduje średni przyrost współczynnika GSP o 0,0279 dla tego modelu. Dla modelu Q4-5 ten sam przyrost poziomu stanu samonaprężenia powoduje średni przyrost GPS o 0,0171.

Elementy modelu Q4-5 są bardziej wytężone niż dla modelu Q4-4 (rys. 6.44b) – cięgna o średnio 15,4 punktu procentowego, natomiast zastrzały średnio o 16,2 punktu procentowego. Dla modeli Q4-4 i Q4-5 cięgna są bardziej wytężone niż zastrzały. Przykładowo, dla modelu Q4-5 cięgna są o 4,8% bardziej wytężone niż zastrzały przy minimalnym poziomie stanu samonaprężenia $S_{\min}$ i o 12,7% przy maksymalnym poziomie stanu samonaprężenia $S_{\max}$.

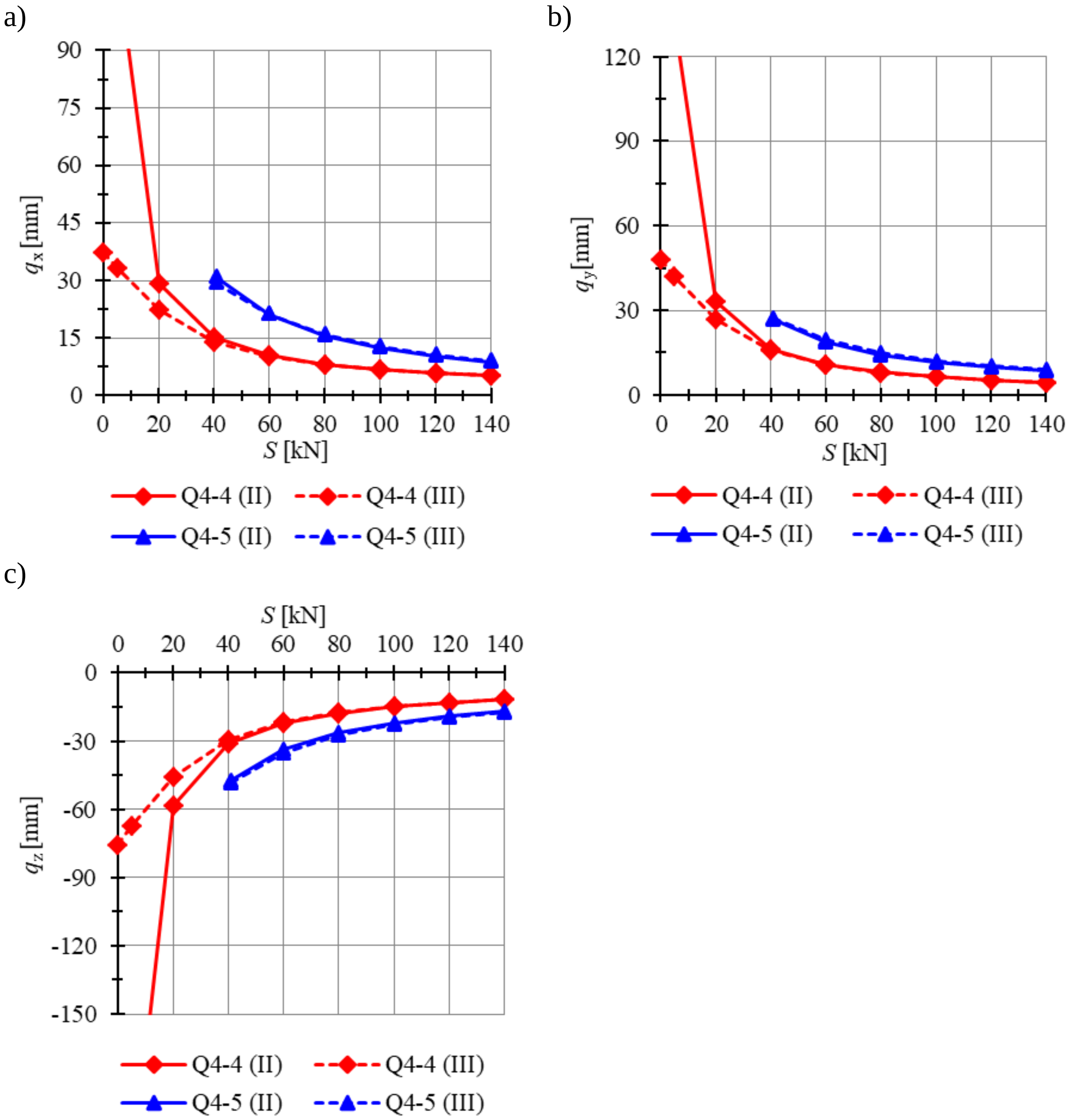
Następnie porównano modele Q4-6 i Q4-7, tj. modele podparte swobodnie na jednej krawędzi i utwierdzone na drugiej. Dla modelu A4-6 zidentyfikowano mechanizm, natomiast dla Q4-7 – nie. Przeanalizowano wpływ stanu samonaprężenia na:

– minimalne przemieszczenia węzłów w kierunku x (rys. 6.45a), y (rys. 6.45b) i z (rys. 6.53c),
– globalny parametr sztywności GPS (rys. 6.46a),
– wytężenie elementów W_{max} (rys. 6.46b).

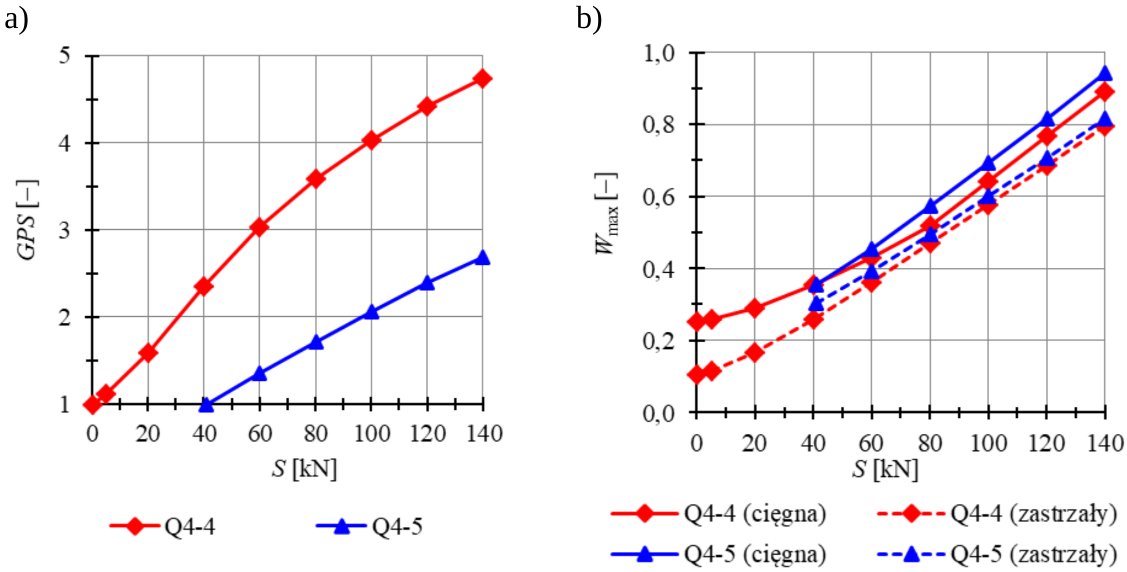
W tabeli 6.24 zawarto wybrane parametry statyczne otrzymane dla minimalnego i maksymalnego poziomu stanu samonaprężenia.

Tabela 6.24. *Charakterystyki wytrzymałościowe dla modeli Q4-6 i Q4-7*

S [kN]	typ elementu	*Model Q4-4* ($S_{\min} = 4$ kN)			*Model Q4-5* ($S_{\min} = 9$ kN)		
		N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]	N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]
$S_{\min}$	cięgna	4,4	0,040	1,0	11,9	0,108	1,0
	zastrzały	5,2	0,029		11,7	0,063	
140	cięgna	97,5	0,884	1,03	97,8	0,888	1,14
	zastrzały	141,3	0,769		142,6	0,776	



Rys. 6.45. Wpływ stanu samonaprężenia na maksymalne przemieszczenia w kierunku: a) x, b) y, c) z dla modeli Q4-6 i Q4-7



Rys. 6.46. Wpływ stanu samonaprężenia S na: a) globalny parametr sztywności GPS, b) wytężenie elementów W_{max} modeli Q4-6 i Q4-7

W przypadku modeli płyt wspornikowych, wartość minimalnego poziomu stanu samonaprężenia wynosi $S_{\min} = 5$ kN dla modelu Q4-6 i $S_{\min} = 6$ kN dla modelu Q4-7.

W przypadku przemieszczeń, rezultaty otrzymane przy zastosowaniu teorii drugiego (II) rzędu różnią się znacznie od wyników otrzymanych przy użyciu teorii (III) rzędu dla modelu Q4-6 dla niskich poziomów stanu samonaprężenia. Dla modelu Q4-7 różnice pomiędzy przemieszczeniami są niewielkie niezależnie od poziomu stanu samonaprężenia. Przykładowo, dla minimalnego poziomu stanu samonaprężenia błąd względny dla maksymalnego przemieszczenia w kierunku z (rys. 6.45c) wynosi kolejno dla rozpatrywanych modeli Q4-6 i Q4-7 25,41% i 3,33%. Dla maksymalnego poziomu stanu samonaprężenia, błąd względny dla przemieszczenia w kierunku z jest równy stosownie 0,59% i 0,08%.

Porównując dane zawarte w tabeli 6.23 i na rysunku 6.46a można stwierdzić, że model Q4-4 jest sztywniejszy. Przyrost poziomu stanu samonaprężenia o 1 kN powoduje średni przyrost współczynnika GSP o 0,0279 dla tego modelu. Dla modelu Q4-5 ten sam przyrost poziomu stanu samonaprężenia powoduje średni przyrost GPS o 0,0171.

Elementy modelu Q4-7 są bardziej wytężone niż dla modelu Q4-6 (rys. 6.46b) dla niskiego poziomu stanu samonaprężenia – cięgna o 6,8 punktu procentowego, natomiast zastrzały o 3,5 punktu procentowego dla minimalnego poziomu samonaprężenia. Dla maksymalnego poziomu stanu samonaprężenia różnice są mniejsze i wynoszą odpowiednio 0,3 i 0,7 punktu procentowego. Dla modeli Q4-6 i Q4-7 cięgna są bardziej wytężone niż zastrzały. Przykładowo, dla modelu Q4-7 cięgna są o 4,4 punktu procentowego bardziej wytężone niż zastrzały przy minimalnym poziomie stanu samonaprężenia $S_{\min}$ i o 11,1 punktu procentowego przy maksymalnym poziomie stanu samonaprężenia $S_{\max}$.

6.5.2. 16-modułowa płyta i pasmo płytowe *Quartex*

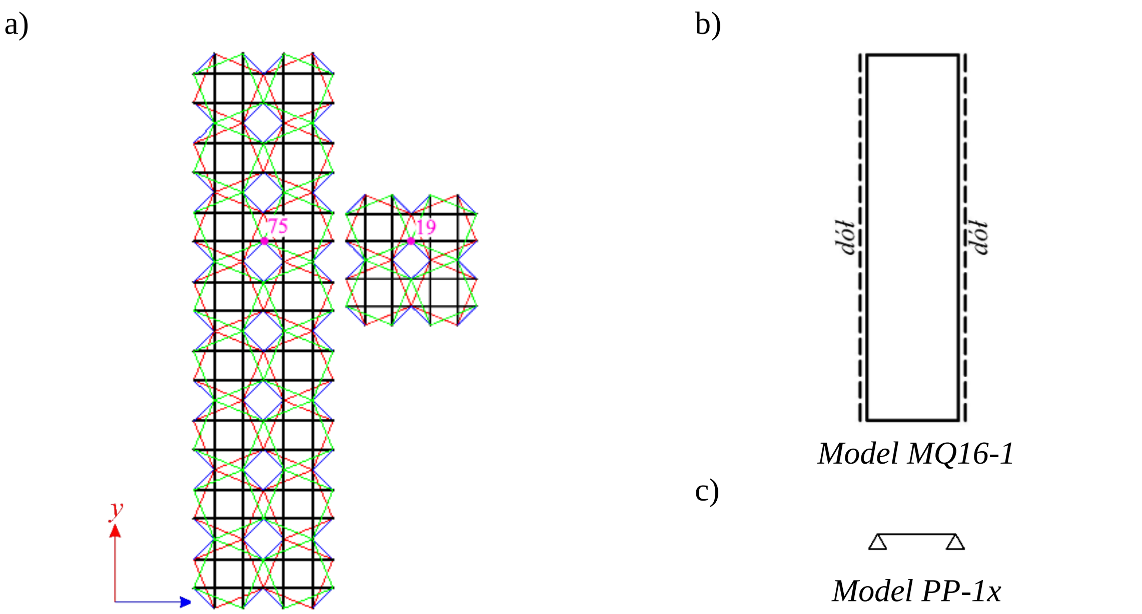
Kolejną rozpatrywaną konstrukcją jest płyta składająca się z 16 modułów *Quartex*. Wszystkie analizowane struktury są kratownicami (***K***), zastrzały znajdują się wewnątrz układu elementów rozciąganych (***W***) o pomijalnie małej sztywności na ściskanie (***C***). We wszystkich rozpatrywanych 10 modelach wystąpiły stany samonaprężenia (***S***), których liczba zależy od liczby zablokowanych stopni swobody. Stabilność układu zapewniła superpozycja stanu naprężenia uzyskanego dla pojedynczej struktury. Modele Q16-1 i Q16-6 ze względu na występowanie mechanizmu infinitezymalnego (***M***), zaliczono do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 1, modele Q16-3 – Q16-5 – do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 2. Model Q16-1, w którym mechanizm nie jest stabilizowany przez stan samonaprężenia, sklasyfikowano jako konstrukcję niebędącą tensegrity.

Modele Q16-1 – Q16-5 odpowiadają kolejno modelom pasma płytowego, tj. PQ-1x – PQ-5x. Wszystkie rozpatrywane modele pasm charakteryzują się cechami ***K, W, C*** i ***S***. Uwzględnianie stanu samonaprężenia pojedynczego elementów pozwoliło na identyfikację rodzaju elementów. Modele PQ-1y i PQ-1x z uwagi na występowanie mechanizmu infinitezymalnego (***M***) zakwalifikowano jako konstrukcje o cechach tensegrity klasy 1, natomiast pozostałe – jako konstrukcje o cechach tensegrity klasy 2.

Analiza ilościowa (5.5.2 i 5.5.4) wykazała, że porównywalne modele 16-modułowych płyt *modified Quartex* i pasm płytowych różnią się ilością mechanizmów infinitezymalnych. W tabeli 6.25 porównano rezultaty analizy jakościowej dla modeli Q16-1 i PQ-1x (modeli płyt swobodnie podpartych). Rozpatrywane modele zostały obciążone siłami $P_z = -1$ kN działającym w kierunku osi z, przyłożonymi do górnych węzłów konstrukcji.

Dla rozważanych konstrukcji, przyjęty minimalny poziom stanu samonaprężenia zależy od wybranego modelu i wynosi $S_{\min} = 1$ kN dla modelu Q16-1 i $S_{\min} = 0{,}01$ kN dla modelu PQ-1x.

Dla rozpatrywanych modeli, jako charakteryzujących się występowaniem mechanizmu, należało uwzględnić geometryczną nieliniowość konstrukcji i zastosować teorię trzeciego rzędu. Maksymalna wartość błędu względnego dla porównywanych wartości przemieszczeń wynosi 17,7%, co świadczy o braku stosowności uproszczonego modelu pasma płytowego.



Rys. 6.47. a) widok z góry 16-modułowej płyty *modified Quartex* i pasma płytowego (na różowo oznaczono odpowiadające sobie węzły), b) modele płyt, c) modle pasm

Tabela 6.25. *Porównanie przemieszczeń 16-modułowej płyty Quartex i pasma płytowego*

S [kN]	teoria drugiego rzędu			teoria trzeciego rzędu		
	model PQ-1x	model Q16-1	błąd względny	model PQ-1x	model Q16-1	błąd względny
	q_{60} [mm]	q_{225} [mm]	Δq [%]	q_{39} [mm]	q_{60} [mm]	Δq [%]
1	-0,033	-0,040	-17,24	-0,378	-0,425	-11,20
10	-0,035	-0,040	-13,81	-0,210	-0,248	-15,04
20	-0,035	-0,040	-13,30	-0,113	-0,137	-17,70
30	-0,035	-0,040	-12,91	-0,074	-0,089	-17,50
40	-0,035	-0,040	-12,55	-0,057	-0,068	-16,36
50	-0,035	-0,040	-12,21	-0,049	-0,058	-15,21
60	-0,035	-0,039	-11,88	-0,045	-0,052	-14,24
70	-0,035	-0,039	-11,57	-0,042	-0,049	-13,45
80	-0,035	-0,039	-11,26	-0,040	-0,046	-12,79
90	-0,035	-0,039	-10,96	-0,039	-0,045	-12,23
100	-0,035	-0,039	-10,67	-0,038	-0,043	-11,73
110	-0,035	-0,039	-10,38	-0,038	-0,042	-11,29
120	-0,035	-0,039	-10,10	-0,037	-0,042	-10,88
130	-0,035	-0,039	-9,83	-0,037	-0,041	-10,51
140	-0,035	-0,038	-9,56	-0,037	-0,041	-10,16

Porównano modele płyty 16-modułowych charakteryzujących się występowaniem mechanizmu, tj. Q16-1 i Q16-6. Przeanalizowano wpływ stanu samonaprężenia na:

- minimalne przemieszczenia węzłów w kierunku x (rys. 6.8a), y (rys. 6.48b) i z (rys. 6.48c),
- globalny parametr sztywności GPS (rys. 6.49a),
- wytężenie elementów W_{max} (rys. 6.49b).

W tabeli 6.26 zawarto wybrane parametry statyczne otrzymane dla minimalnego i maksymalnego poziomu stanu samonaprężenia.

W przypadku rozpatrywanych modeli, wartość minimalnego poziomu stanu samonaprężenia wynosi $S_{\min} = 1$ kN dla modelu Q16-1 i $S_{\min} = 10$ kN dla modelu Q16-6.

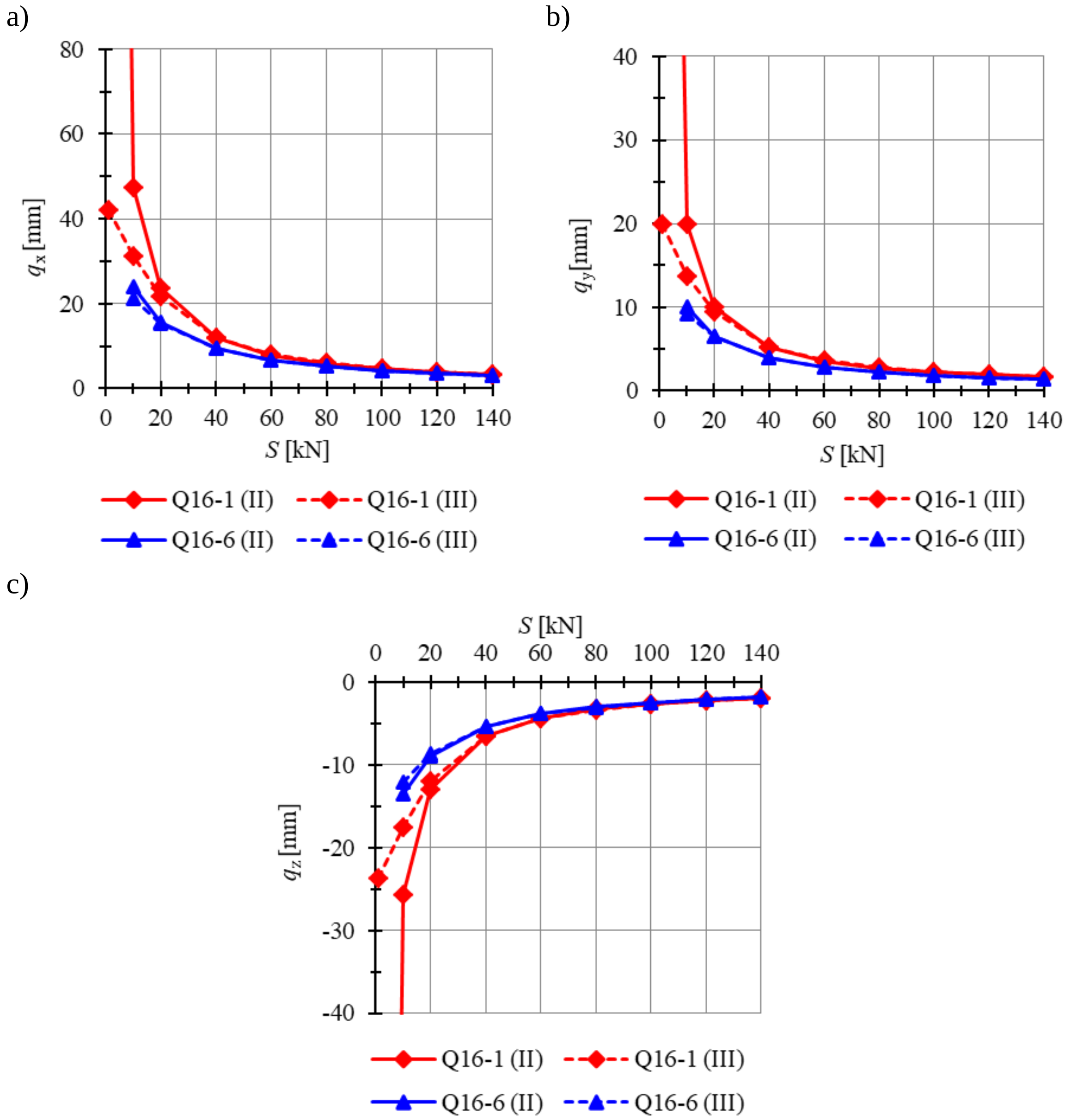
W przypadku przemieszczeń, rezultaty otrzymane przy zastosowaniu teorii drugiego (II) rzędu różnią się znacznie od wyników otrzymanych przy użyciu teorii (III) rzędu dla niskich poziomów stanu samonaprężenia. Przykładowo, dla minimalnego poziomu stanu samonaprężenia błąd względny dla maksymalnego przemieszczenia w kierunku z (rys. 6.48c) wynosi kolejno dla rozpatrywanych modeli Q16-1 oraz Q16-6 982,8% i 10,9%. Dla maksymalnego poziomu stanu samonaprężenia, błąd względny jest mniejszy i dla przemieszczenia w kierunku z jest równy stosownie 0,93% i 0,76%.

Porównując dane zawarte w tabeli 6.26 i na rysunku 6.49a można stwierdzić, że model Q16-1 jest sztywniejszy. Przyrost poziomu stanu samonaprężenia o 1 kN powoduje średni przyrost współczynnika GSP o 0,0794 dla tego modelu. Dla modelu Q16-6 ten sam przyrost poziomu stanu samonaprężenia powoduje średni przyrost GPS o 0,0422.

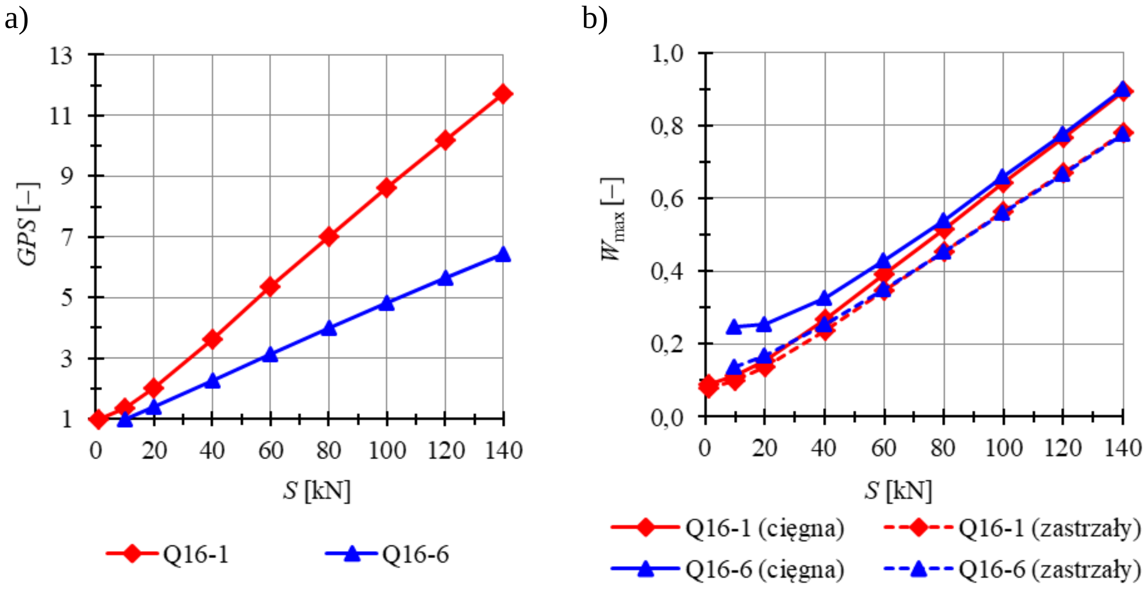
Elementy modelu Q16-6 są bardziej wytężone niż dla modelu Q16-1 (rys. 6.49b) dla niskiego poziomu stanu samonaprężenia – cięgna o 15,7 punktu procentowego, natomiast zastrzały o 5,8 punktu procentowego dla minimalnego poziomu samonaprężenia. Dla maksymalnego poziomu stanu samonaprężenia cięgna modelu Q16-6 są o 0,7 punktu procentowego bardziej wytężone, natomiast zastarzały - o 0,4 punktu procentowego mniej wytężone niż dla modelu Q16-1. Dla modeli Q16-1 i Q16-6 cięgna są bardziej wytężone niż zastrzały. Przykładowo, dla modelu Q16-6 cięgna są średnio o 9,4 punktu procentowego bardziej wytężone niż zastrzały.

Tabela 6.26. *Charakterystyki wytrzymałościowe dla modeli Q16-1 i Q16-6*

S [kN]	**typ elementu**	Model Q16-1 ($S_{\min} = 1$ kN)			Model Q16-6 ($S_{\min} = 10$ kN)		
		N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]	N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]
$S_{\min}$	cięgna	9,9	0,090	1,0	27,2	0,247	1,0
	zastrzały	14,5	0,079		25,1	0,137	
140	cięgna	98,4	0,893	11,7	99,1	0,899	6,4
	zastrzały	143,3	0,780		142,5	0,776	



Rys. 6.48. Wpływ stanu samonaprężenia na maksymalne przemieszczenia w kierunku: a) x, b) y, c) z dla modeli Q16-1 i Q16-6



Rys. 6.49. Wpływ stanu samonaprężenia S na: a) globalny parametr sztywności GPS, b) wytężenie elementów W_{max} dla modeli Q16-1 i Q16-6

6.5.3. 64-modułowa płyta *Quartex*

Następną rozważaną strukturą jest płyta składająca się z 64 modułów *Quartex* (rys. 6.50). Wszystkie analizowane struktury są kratownicami (***K***), zastrzały znajdują się wewnątrz układu elementów rozciąganych (***W***) o pomijalnie małej sztywności na ściskanie (***C***). We wszystkich rozpatrywanych 3 modelach wystąpiły stany samonaprężenia (***S***), których liczba zależy od liczby zablokowanych stopni swobody. Stabilność układu zapewniła superpozycja stanu naprężenia uzyskanego dla pojedynczej struktury. W związku z powyższym, modele Q64-2 i Q64-3, charakteryzujące się występowaniem mechanizmu infinitezymalnego (***M***), zaliczono do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 1, natomiast model Q64-1 ze względu na brak mechanizmu – do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 2. Analiza ilościowa 64-modułowej płyty *Quartex* jest zawarta w 5.5.3.

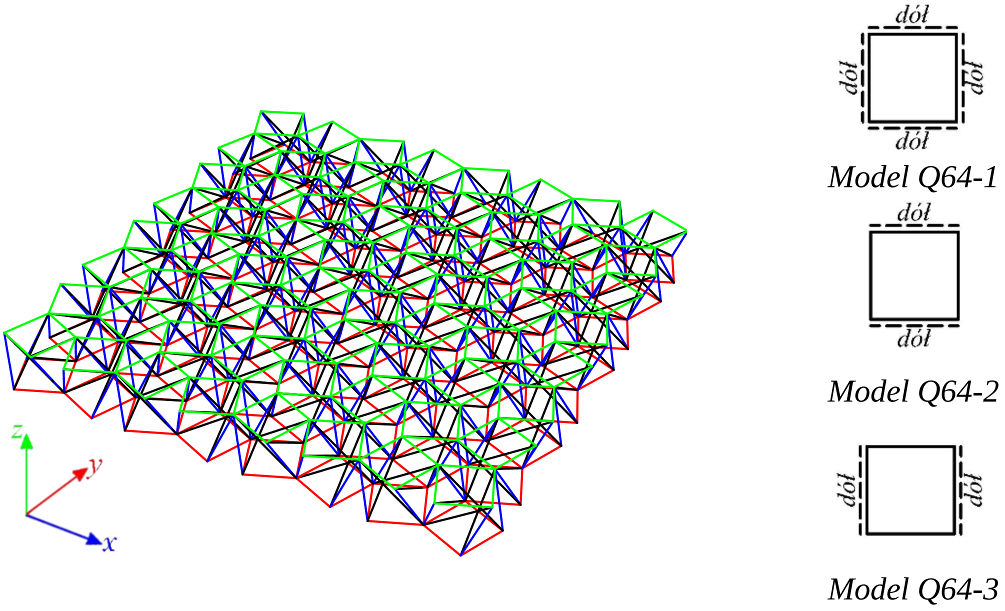
Rozpatrywane modele zostały obciążone siłami $P_z = -1$ kN działającym w kierunku osi z, przyłożonymi do górnych węzłów konstrukcji. W przypadku modeli Q64-2 i Q64-3, wartości własne stycznej macierzy sztywności nie są dodatnie, czyli struktura nie jest stateczna przy zadanym poziomie obciążenia. Wobec powyższego, w pracy nie przedstawiono rezultatów analizy ilościowej dla modeli Q64-2 i Q64-3.

Dla modelu Q64-1 przeanalizowano wpływ stanu samonaprężenia na:

– minimalne przemieszczenia węzłów w kierunku x (rys. 6.51a), y (rys. 6.51b) i z (rys. 6.51c),
– globalny parametr sztywności GPS (rys. 6.52a),
– wytężenie elementów W_{max} (rys. 6.52b).

W tabeli 6.27 zawarto wybrane parametry statyczne otrzymane dla minimalnego i maksymalnego poziomu stanu samonaprężenia.

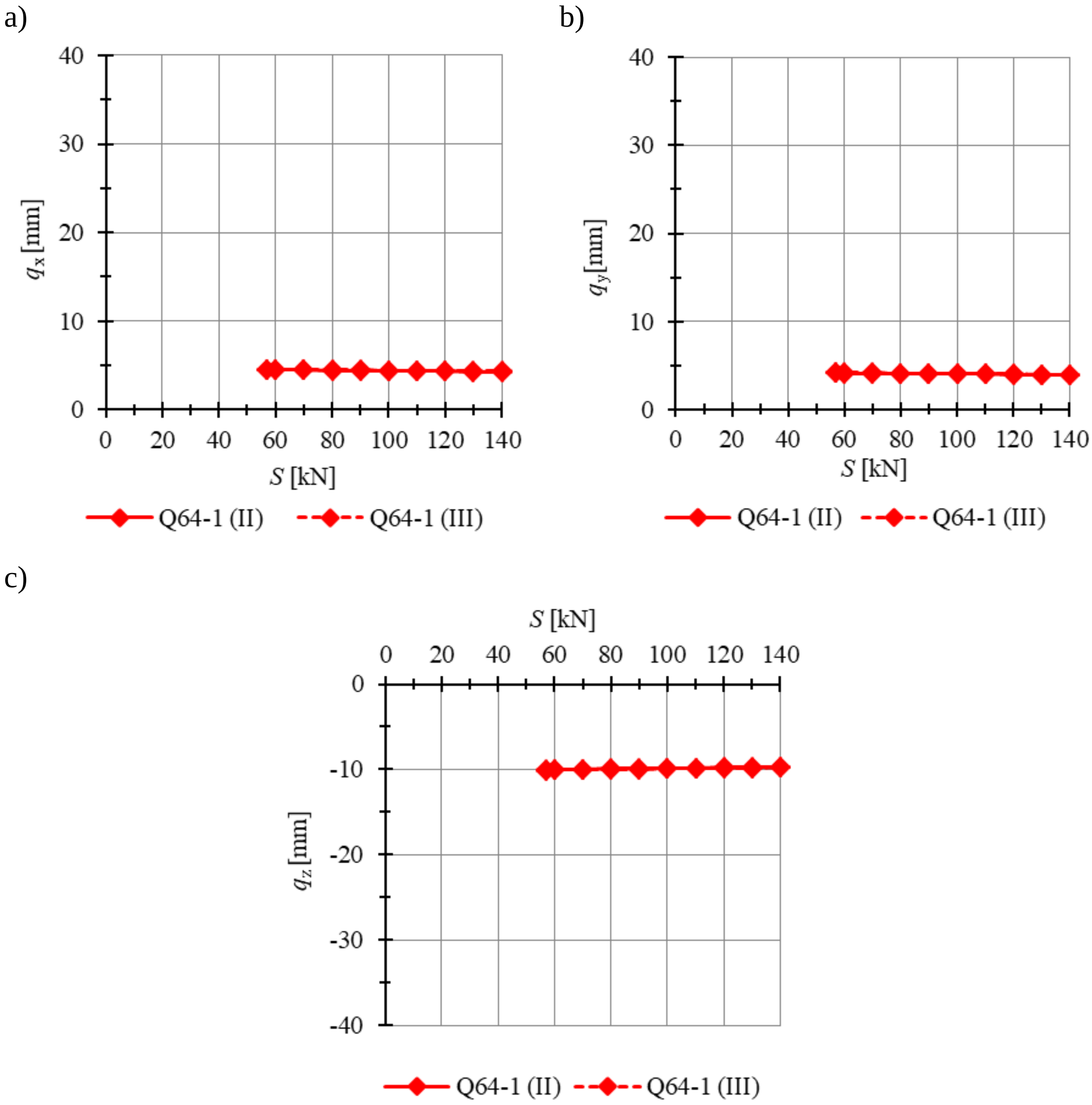
a) b)



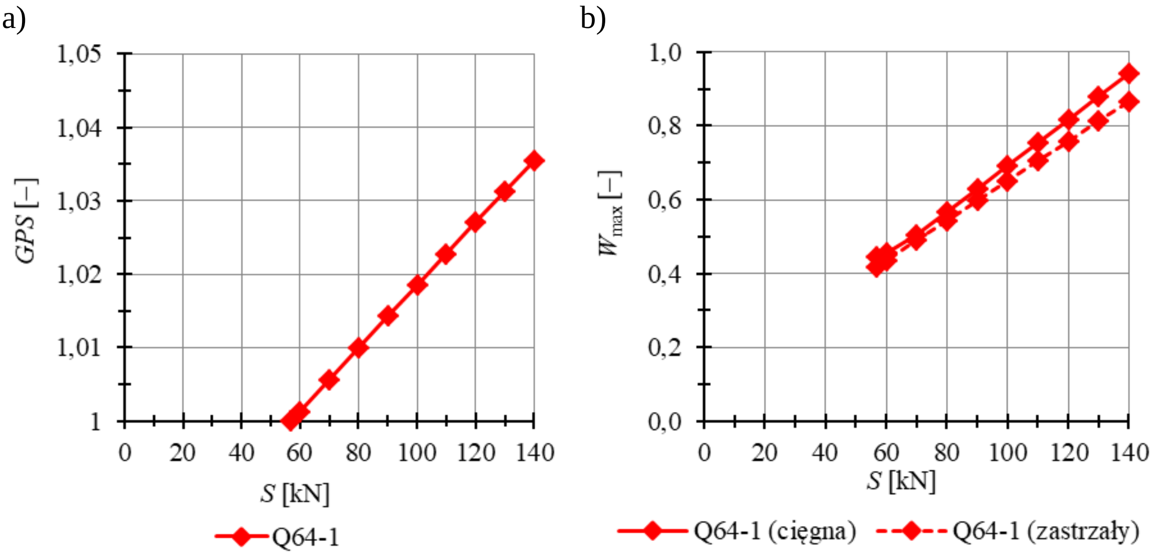
Rys. 6.50. 64-modułowa płyta *Quartex*

Tabela 6.27. *Charakterystyki wytrzymałościowe dla modelu Q64-1*

S [kN]	**typ elementu**	Model Q64-1 ($S_{\min} = 57$ kN)		
		N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]
$\mathbf{S_{min}}$	cięgna	49,2	0,446	1,0
	zastrzały	-77,0	0,458	
140	cięgna	103,7	0,941	1,04
	zastrzały	-159,3	0,867	



Rys. 6.51. Wpływ stanu samonaprężenia na przemieszczenia: a) q_{x}, b) q_{y}, c) q_{z} modelu Q64-1



Rys. 6.52. Wpływ stanu samonaprężenia S na: a) globalny parametr sztywności GPS, b) wytężenie elementów W_{max} modelu Q64-1

Dla modelu Q64-1 wartość minimalnego poziomu stanu samonaprężenia – $S_{\min} = 57$ kN. Dla modelu Q64-1 nie uzyskano różnic pomiędzy wynikami uzyskanymi przy zastosowaniu teorii drugiego (II) i trzeciego (III) rzędu ze względu na brak mechanizmu. Porównując wyniki otrzymane dla poprzednio rozpatrywanych konstrukcji niecharakteryzujących się obecnością mechanizmu, dla modelu Q64-1 uzyskano znaczne wartości przemieszczeń. Dodatkowo, dla modelu Q64-1 stan samonaprężenia ma nieznaczny wpływ na przemieszczenia.

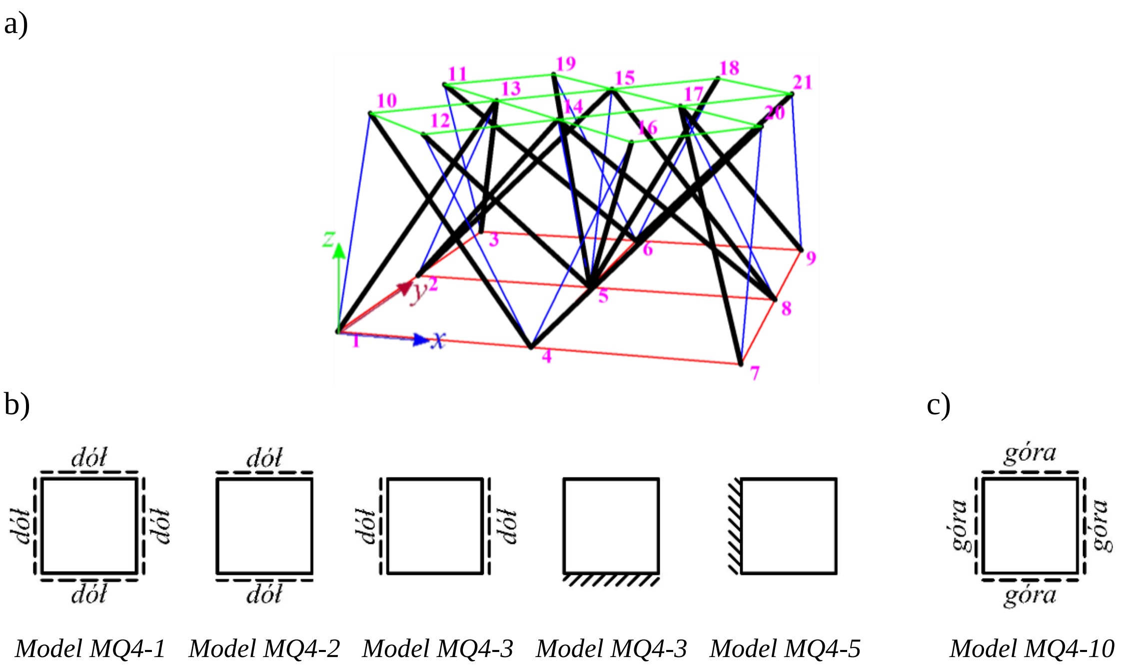
W przypadku modelu Q64-1, GPS nie jest stały, a zmienia się liniowo (podobnie było w przypadku poprzednio analizowanego modelu S18-3). Zmiana ta jest niewielka – przyrost poziomu stanu samonaprężenia o 1 kN powoduje średni przyrost współczynnika GSP o 0,0004. Zależność pomiędzy poziomem stanu samonaprężenia a wytężeniem elementów jest liniowa dla modelu Q64-1. Dla modelu Q64-1 przy minimalnym poziomie stanu samonaprężenia $S_{\min}$ cięgna są 6,4% bardziej wytężone niż zastrzały, natomiast przy maksymalnym poziomie stanu samonaprężenia $S_{\max}$ cięgna są o 8,6% bardziej wytężone niż zastrzały.

6.6. Struktury zbudowane z modułu *modified Quartex*

Pierwszą rozpatrywaną grupą konstrukcji są struktury, których budowa opiera się na module *modified Quartex*. Długość zastrzałów dla struktur zbudowanych z tego modułu wynosi $L = 1{,}5$ m, a ich nośność – $N_{b,Rd} = 193{,}9$ kN. Maksymalna siły sprężenia w cięgnach wynosi $N_{max} = 1{,}4907 \cdot S$. Rozpatrzone zostaną płyty składające się z czterech, ośmiu, szesnastu i sześćdziesięciu czterech modułów oraz pasmo płytowe. Minimalny stan samonaprężenia został przyjęty tak, aby zapewnić właściwą identyfikację elementów struktury i różni się w zależności od przyjętego schematu statycznego, natomiast maksymalny stan samonaprężenia założono równy $S_{\max} = 60$ kN, odpowiadający maksymalnemu wytężeniu cięgien na poziomie 95,4%.

6.6.1. 4-modułowa płyta *modified Quartex*

Pierwszą w kolejności rozważaną strukturą zbudowaną z modułów *modified Quartex* jest płyta 4-modułowa (rys.6.53a). Rozpatrzono 10 modeli różniących się sposobem podparcia (5.6.1). Wszystkie analizowane struktury są kratownicami (***K***), zastrzały znajdują się wewnątrz układu elementów rozciąganych (***W***) o pomijalnie małej sztywności na ściskanie (***C***). We wszystkich rozpatrywanych 10 modelach wystąpiły stany samonaprężenia (***S***), których liczba zależy od liczby zablokowanych stopni swobody. Otrzymane stany samonaprężenia nie definiują jednoznacznie elementów konstrukcji, dopiero uwzględnienie stanu samonaprężenia pojedynczego modułu pozwoliło zidentyfikować rodzaje elementów. W związku z powyższym, modele MQ4-1 – MQ4-5 (rys. 6.53b), charakteryzujące się występowaniem mechanizmu infinitezymalnego (***M***), zaliczono do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 1, natomiast modele MQ4-6 – MQ4-10 (rys. 6.53c) ze względu na brak mechanizmu – do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 2. Analizę ilościową płyt 4-modułowych zbudowanych z modułów *modified Quartex* opisano w 5.6.1.



Rys. 6.53. a) geometria 4-modułowej płyty *modified Quartex*, b) modele konstrukcji o cechach tensegrity klasy 1, c) modele o cechach tensegrity klasy 2

W rozdziale skupiono się na modelach, w których występuje mechanizm infinitezymalny. Do dalszych rozważań przyjęto modele MQ4-1 – MQ4-5. Dodatkowo, aby przedstawić wpływ występowania mechanizmu infinitezymalnego na pracę konstrukcji, przedstawiono także rezultaty otrzymane dla modelu MQ4-10.

Modele MQ4-1, MQ4-2, MQ4-3 oraz MQ4-10 zostały obciążone obciążeniem równomiernie rozłożonym $q_{\mathrm{z}} = -10\ \mathrm{kN/m^2}$ działającym w kierunku osi z, przyłożonym do górnej płaszczyzny płyty, natomiast modele MQ4-4 oraz MQ4-5 zostały obciążone dwiema siłami $P_{\mathrm{z}} = -5\ \mathrm{kN}$ działającymi w kierunku osi z, przyłożonymi do dwóch górnych węzłów znajdujących się na swobodnej krawędzi konstrukcji, tj. do węzłów 18 i 19 w przypadku modelu MQ4-4 ($P_{54} = P_{57} = P_{\mathrm{z}}$) i do węzłów 20 i 21 w przypadku modelu ($P_{60} = P_{63} = P_{\mathrm{z}}$).

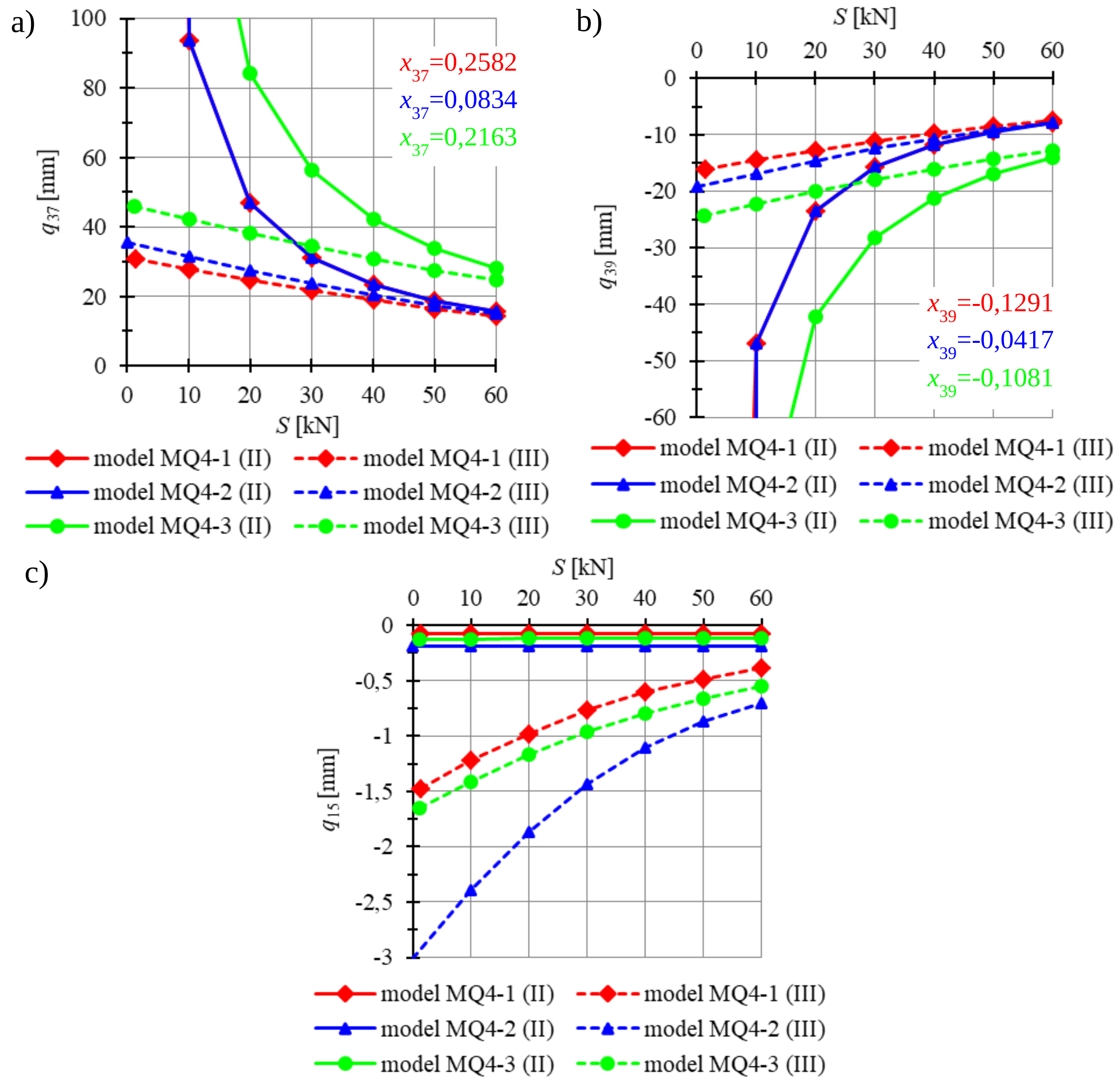
Najpierw porównano pierwsze trzy modele, tj. modele ze swobodnym podparciem krawędzi (MQ4-1 – MQ4-3). Przeanalizowano wpływ stanu samonaprężenia na:

- przemieszczenia wybranych węzłów w kierunku x (rys. 6.54a), y (rys. 6.54b) i z (rys. 6.54c),
- globalny parametr sztywności GPS (rys. 6.55a),
- wytężenie elementów W_{max} (rys. 6.55b).

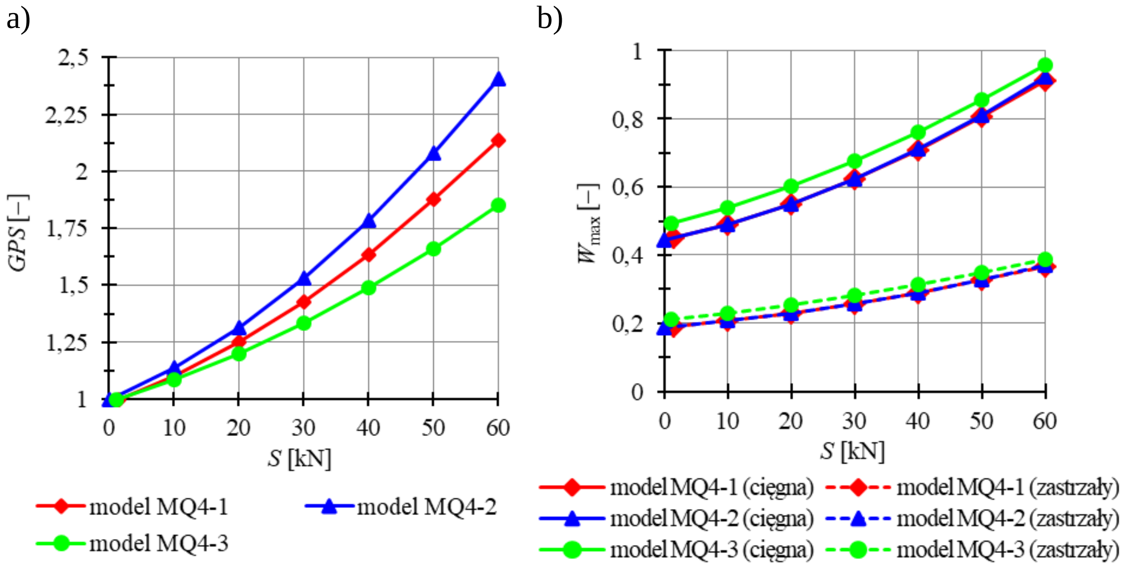
W tabeli 6.28 zawarto wybrane parametry statyczne otrzymane dla minimalnego i maksymalnego poziomu stanu samonaprężenia.

Tabela 6.28. *Charakterystyki wytrzymałościowe dla modeli MQ4-1 –MQ4-3*

S	**typ**	*Model MQ4-1* ($S_{\min}=1{,}2$ kN)			*Model MQ4-2* ($S_{\min}=0{,}01$ kN)			*Model MQ4-3* ($S_{\min}=1{,}4$ kN)		
[kN]	**elementu**	N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]	N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]	N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]
$\boldsymbol{S_{\min}}$	cięgna	49,5	0,450	1,0	48,8	0,443	1,0	54,4	0,493	1,0
	zastrzały	-37,0	0,191		-36,6	0,189		-41,0	0,211	
60	cięgna	100,5	0,912	2,1	101,5	0,921	2,4	105,6	0,958	1,9
	zastrzały	-71,2	0,367		-71,93	0,371		-75,4	0,389	



Rys. 6.54. Wpływ stanu samonaprężenia na przemieszczenia: a) q_{39}, b) q_{37}, c) q_{15} modeli MQ4-1 – MQ4-3



Rys. 6.55. Wpływ stanu samonaprężenia S na: a) globalny parametr sztywności GPS, b) wytężenie elementów W_{max} modeli MQ4-1 – MQ4-3

W przypadku modeli płyt swobodnie podpartych, tj. MQ4-1 – MQ4-3, najmniejszy poziom stanu samonaprężenia zaobserwowano dla modelu MQ4-2, natomiast najwyższy – dla modelu MQ4-3. Wartości minimalnych poziomów stanu samonaprężenia dla tych modeli wynoszą odpowiednio $S_{\min} = 0{,}01$ kN i $S_{\min} = 1{,}4$ kN. Dla modelu MQ4-1 minimalny poziom stanu samonaprężenia wynosi $S_{\min} = 1{,}2$ kN.

Podobnie jak dla pojedynczego modułu *modified Quartex*, także w przypadku płyt 4-modułowych, rezultaty otrzymane przy zastosowaniu teorii drugiego (II) rzędu znacznie różnią się od wyników otrzymanych przy użyciu teorii (III) rzędu. Przykładowo,
dla minimalnego poziomu stanu samonaprężenia błąd względny dla przemieszczenia q_{39} (rys. 6.9a) wynosi kolejno dla rozpatrywanych modeli MQ-1 – MQ-3 1988%, $2{,}44 \cdot 10^5$% i 2917%. Dla maksymalnego poziomu stanu samonaprężenia, błąd względny dla przemieszczenia q_{39} jest równy stosownie 5,81%, 0,3% i 10,32%. Otrzymane wartości przemieszczeń węzła 13 konstrukcji są zgodne z postacią mechanizmu infinitezymalnego. Analogicznie jak w przypadku pojedynczego modułu *modified Quartex*, przemieszczenie w kierunku x jest dwukrotnie większe od przemieszczenia w kierunku z. Zgodnie z teorią drugiego rzędu, wartość przemieszczenia q_{15}, dla którego składowo wektora opisującego deformację wynosi

$x_{15} = 0$, nie zależy od poziomu stanu samonaprężenia i jest równa zero. Obliczenia przeprowadzone zgodnie z teorią trzeciego rzędu wykazały, w rzeczywistości wartość tego przemieszczenia zależy od poziomu stanu samonaprężenia. Otrzymane wartości q_{15} pozostają niewielkie, ale różne od zera.

Porównując dane zawarte w tabeli 6.28 i na rysunku 6.55a można stwierdzić, że model MQ4-2 jest najsztywniejszy. Przyrost poziomu stanu samonaprężenia o 1 kN powoduje średni przyrost współczynnika GSP o 0,0235 dla tego modelu. Dla modelu MQ4-1 ten sam przyrost poziomu stanu samonaprężenia powoduje średni przyrost GPS o 0,0194, natomiast dla modelu MQ4-3 – o 0.0145. Porównując uzyskane wartości przemieszczeń, model MQ4-3 jest znacznie mniej sztywny niż modele MQ4-1 i MQ4-2. Porównując kierunek podparcia, model MQ4-2 jest znacznie sztywniejszy niż MQ-3 i porównywalny do MQ-1.

Wartości maksymalnych wytężeń elementów konstrukcji są porównywalne dla modeli MQ4-1 i MQ4-2, natomiast dla modelu MQ4-3 są one znacznie wyższe (rys. 6.55b). Przykładowo, dla minimalnego poziomu stanu samonaprężenia $S_{\min}$ różnica w poziomie wytężenia elementów pomiędzy modelami MQ4-2 i MQ4-3 wynosi 5,1 punktów procentowych dla cięgien i 2,3 dla zastrzałów, natomiast dla maksymalnego poziomu stanu samonaprężenia $S_{\max}$ – odpowiednio 3,7 and 1,8 punktów procentowych. Dla modeli MQ4-1 – MQ-3 cięgna są bardziej wytężone niż zastrzały. Przykładowo, dla modelu MQ4-3 cięgna są o 57,4% bardziej wytężone niż zastrzały przy minimalnym poziomie stanu samonaprężenia $S_{\min}$ i o 59,7% przy maksymalnym poziomie stanu samonaprężenia $S_{\max}$.

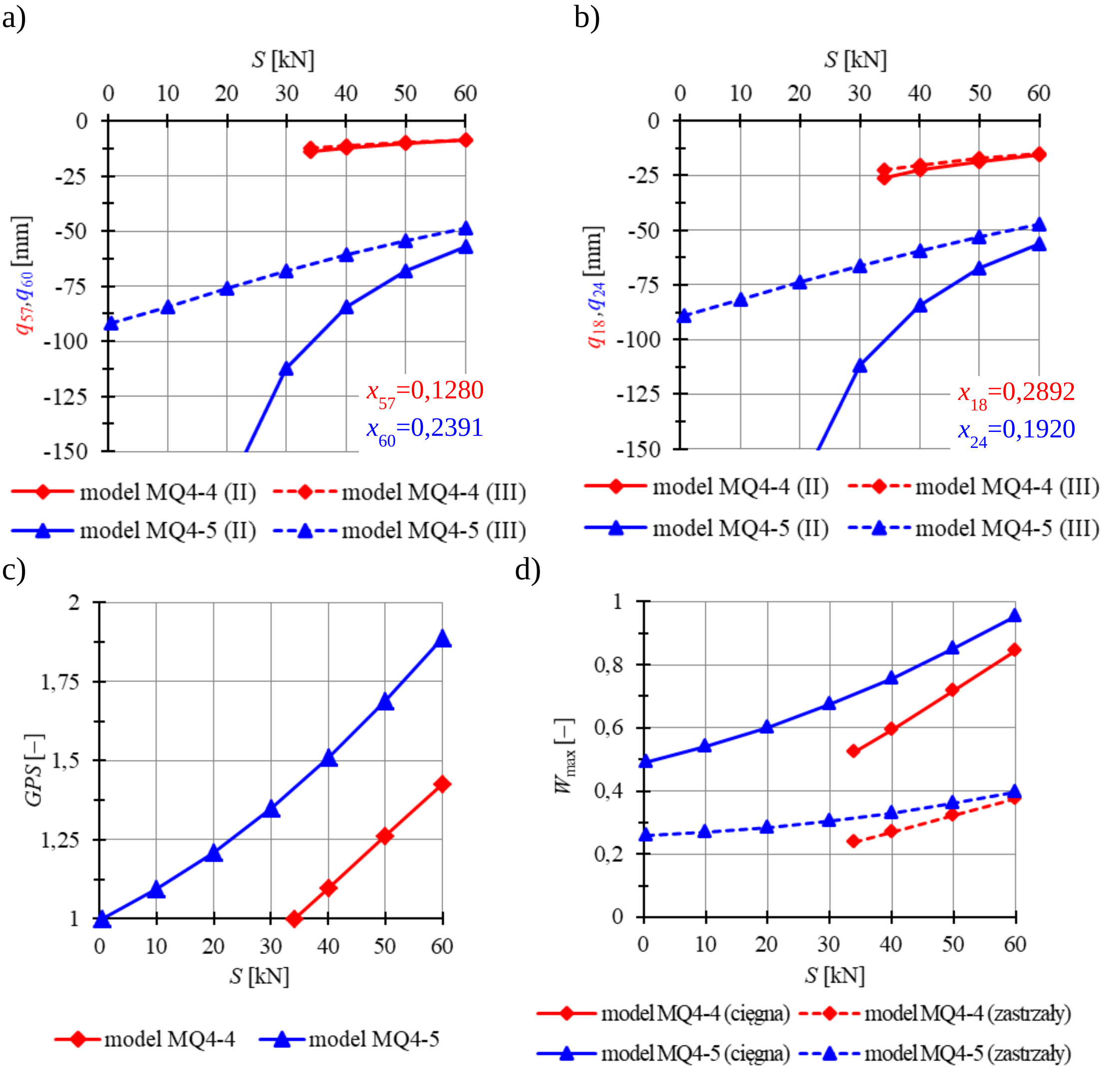
Następnie porównano dwa modele wspornikowe, tj. modele MQ4-4 – MQ4-5. Przeanalizowano wpływ stanu samonaprężenia na:

- wybrane przemieszczenia górnych (rys. 6.56a) i dolnych węzłów w kierunku i z (rys. 6.56b),
- globalny parametr sztywności GPS (rys. 6.56c),
- wytężenie elementów W_{max} (rys. 6.56d).

W tabeli 6.29 zawarto wybrane parametry statyczne otrzymane dla minimalnego i maksymalnego poziomu stanu samonaprężenia.

W przypadku modeli MQ4-4 – MQ4-5 minimalny poziom stanu samonaprężenia jest równy odpowiednio $S_{\min} = 34$ kN i $S_{\min} = 0{,}6$ kN. Dla rozważanych modeli porównano odpowiadające sobie przemieszczenia węzłów dolnych (q_{18} dla modelu

MQ4-4 i q_{24} dla modelu MQ4-5) i górnych (q_{57} dla modelu MQ4-4 i q_{60} dla modelu MQ4-5), znajdujących się na swobodnej krawędzi płyty (rys. 6.11a, b). Wpływ nieliniowości jest bardziej znaczący dla modelu MQ4-5 niż dla modelu MQ4-4. Wynika to ze znacznych wartości minimalnego poziomu stanu samonaprężenia. W przypadku modelu MQ4-5, dla niższych wartości poziomu stanu samonaprężenia wykazano znaczące różnice pomiędzy rezultatami otrzymanymi zgodnie z teorią drugiego (II) i trzeciego (III) rzędu. Biorąc pod uwagę przemieszczenia górnych węzłów, błąd względny dla minimalnego poziomu stanu samonaprężenia $S_{\min}$ wyniósł $6{,}5 \cdot 10^5\%$, natomiast dla $S_{\max}$ – 16,64%. W przypadku modelu MQ4-4 teoria drugiego rzędu jest wystarczająca do celów analizy.



Rys. 6.56. Wpływ stanu samonaprężenia S na: a) przemieszczenia górnych węzłów, b) przemieszczenia dolnych węzłów, c) globalny parametr sztywności GPS, d) wytężenie elementów W_{max} modeli MQ4-4 i MQ4-5

Tabela 6.29. *Charakterystyki wytrzymałościowe dla modeli MQ4-4 i MQ4-5.*

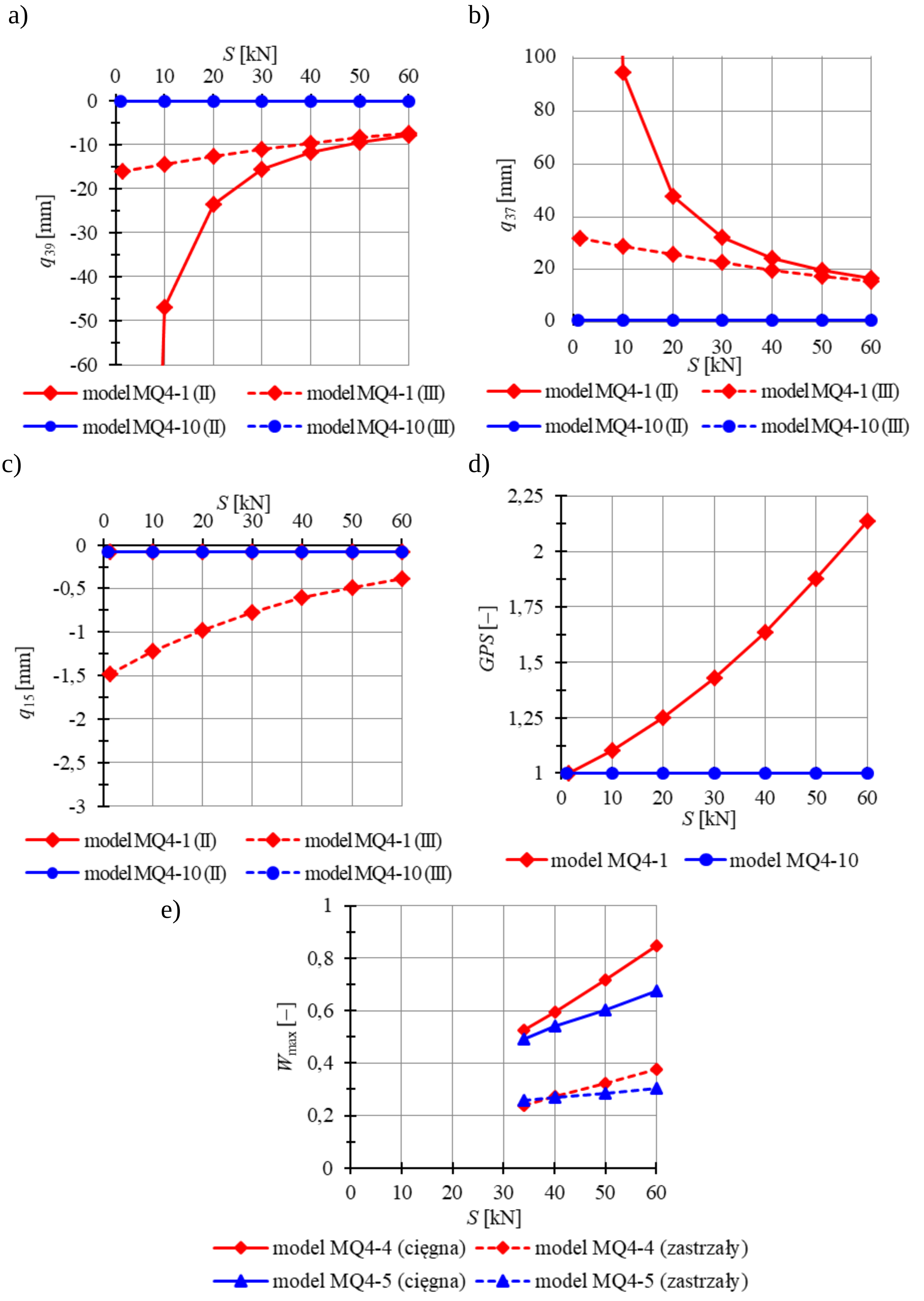
S [kN]	**typ elementu**	*Model MQ4-4* ($S_{\min} = 34$ kN)			*Model MQ4-5* ($S_{\min} = 0{,}6$ kN)		
		N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]	N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]
$S_{\min}$	cięgna	57,7	0,524	1,0	54,1	0,491	1,0
	zastrzały	-46,3	0,239		-50,1	0,258	
60	cięgna	93,2	0,846	1,4	105,2	0,954	1,9
	zastrzały	-73,1	0,376		-77,0	0,397	

Biorąc pod uwagę rezultaty przedstawione na rysunku 6.56c i w tabeli 6.29, można stwierdzić, że model MQ4-4 jest sztywniejszy. Wzrost poziomu stanu samonaprężenia o 1 kN dla modelu MQ4-4 powoduje średni przyrost współczynnika GPS o 0,023, natomiast dla modelu MQ4-5 – o 0,015.

Dla obu modeli, różnica pomiędzy maksymalnym wytężeniem elementów konstrukcji $W_{\max}$ zastrzałów i cięgiem wzrasta wraz ze wzrostem poziomu stanu samonaprężenia. Wytężenie cięgien jest większe dla niż zastrzałów (rys. 6.56d). Dla modelu MQ4-4, wytężenie cięgien jest o 54,4% większe niż zastrzałów dla minimalnego poziomu stanu samonaprężenia $S_{\min}$ i o 55,5% dla maksymalnego poziomu stanu samonaprężenia $S_{\max}$. Dla modelu MQ4-5, dla którego różnica pomiędzy $S_{\min}$ i $S_{\max}$ jest większa, różnice pomiędzy wytężeniami także są większe, i tak dla $S_{\min}$ cięgna są bardziej wytężone niż zastrzały o 47,4%, a dla $S_{\max}$ – o 58,4%.

Dodatkowo porównano dwa modele podparte swobodnie na czterech krawędziach, ale różniące się faktem występowania mechanizmu, tj. modele MQ4-1 i MQ4-10. Przeanalizowano wpływ stanu samonaprężenia na:

– wybrane przemieszczenia węzłów (rys. 6.57a-c),
– globalny parametr sztywności GPS (rys. 6.57d),
– wytężenie elementów W_{max} (rys. 6.57e).



Rys. 6.57. Wpływ stanu samonaprężenia S na przemieszczenia elementów: a) q_{37}, b) q_{39}, c) q_{15}, d) globalny parametr sztywności GPS, e) wytężenie elementów $W_{\max}$ modeli MQ4-1 i MQ4-10

Dla modelu MQ4-10 przemieszczenia analizowanych węzłów nie zależą od poziomu stanu samonaprężenia i są prawie równe zero. Dla modelu MQ4-10 parametr GPS jest stały i równy 1, natomiast wytężenie elementów $W_{\max}$ zmienia się liniowo. Poziom stanu samonaprężenia nie ma wpływu na parametry statyczne modelu MQ4-10, a zmiana wytężenia $W_{\max}$ jest powodowana wzrostem wielkości sił inicjowanych w elementach zwiększającym się poziomem sprężenia konstrukcji. Dla modelu MQ4-10 teoria drugiego (II) rzędu jest wystarczająca do celów analizy, a jej wyniki są zbieżne z rezultatami otrzymanymi przy obliczeniach zgodnie z teorią trzeciego (III) rzędu.

6.6.2. 16-modułowa płyta *modified Quartex* i pasmo płytowe

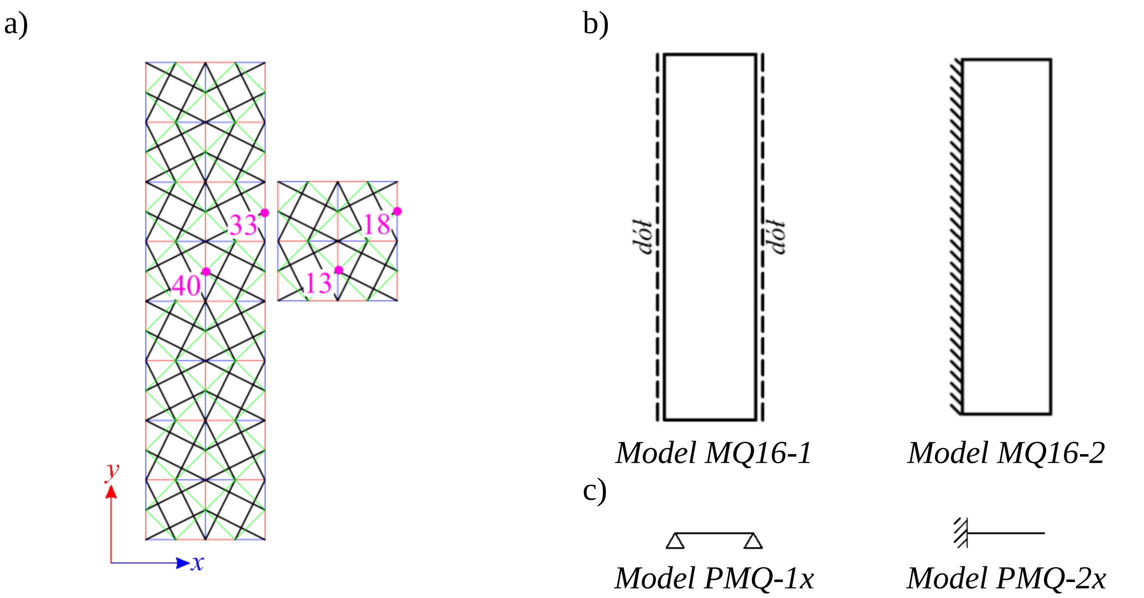
Kolejną rozpatrywaną konstrukcją jest płyta składająca się z 16 modułów *modified Quartex* (rys.6.58). Wszystkie analizowane struktury są kratownicami (***K***), zastrzały znajdują się wewnątrz układu elementów rozciąganych (***W***) o pomijalnie małej sztywności na ściskanie (***C***). We wszystkich rozpatrywanych 10 modelach wystąpiły stany samonaprężenia (***S***), których liczba zależy od liczby zablokowanych stopni swobody. Stabilność układu zapewniła superpozycja stanu naprężenia uzyskanego dla pojedynczej struktury. Modele MQ16-1 i MQ16-6 ze względu na występowanie mechanizmu infinitezymalnego (***M***), zaliczono do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 1, natomiast pozostałe modele MQ16-2 – MQ16-5 – do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 2.

Modele MQ16-1 – MQ16-5 odpowiadają kolejno modelom pasma płytowego, tj. PMQ-1x – PMQ-5x. Wszystkie rozpatrywane modele pasm charakteryzują się cechami ***K, W, C*** i ***S***. Uwzględnianie stanu samonaprężenia pojedynczego elementów pozwoliło na identyfikację rodzaju elementów. Modele PMQ-1y i PMQ-1x z uwagi na występowanie mechanizmu infinitezymalnego (***M***) zakwalifikowano jako konstrukcje o cechach tensegrity klasy 1, natomiast pozostałe – jako konstrukcje o cechach tensegrity klasy 2.

Analiza ilościowa (5.6.2 i 5.6.4) wykazała, że porównywalne modele 16-modułowych płyt *modified Quartex* i pasm płytowych charakteryzują się tą samą ilością mechanizmów infinitezymalnych. W tabeli 6.30 porównano rezultaty analizy jakościowej dla dwóch pierwszych modeli tj. MQ16-1 i PMQ-1x (modeli płyt swobodnie podpartych) oraz MQ16-2 i PMQ-2x (modeli płyt wspornikowych). Porównywane modele przedstawiono także na rys. 6.58b i 6.58c. Modele płyt swobodnie podpartych zostały obciążone obciążeniem równomiernie rozłożonym $q_z = -10\ \mathrm{kN/m^2}$, działającym w kierunku osi z, natomiast modele wspornikowe zostały obciążone siłami działającymi w kierunku z o wartości $P_z = -5$ kN, przyłożonymi do górnych węzłów swobodnej krawędzi konstrukcji.

Dla rozważanych konstrukcji, przyjęty minimalny poziom stanu samonaprężenia zależy od wybranego modelu i wynosi $S_{\min} = 3$ kN dla modeli MQ16-1, $S_{\min} = 5$ kN dla modeli MQ16-2, $S_{\min} = 2$ kN dla modeli PMQ-1x i PP-1y oraz $S_{\min} = 21$ kN dla modeli PMQ-2x i PP-2y.

Dla modeli MQ16-1 i PMQ-1x, jako charakteryzujących się występowaniem mechanizmu, należało uwzględnić geometryczną nieliniowość konstrukcji i zastosować teorię trzeciego rzędu. Przykładowo, błąd względny dla minimalnego poziomu stanu samonaprężenia dla przemieszczenia q_{39} for $S_{\min}$ wynosi 1258%, natomiast dla maksymalnego poziomu stanu samonaprężenia $S_{\max}$ – 1,19%. W przypadku modeli MQ16-2 i PMQ-2x, ze względu na brak mechanizmu, wystarczająca jest teoria drugiego rzędu. Maksymalna wartość błędu względnego dla porównywanych wartości przemieszczeń nie przekroczyła 10%, co świadczy potwierdza zasadność stosowania uproszczonego modelu pasma płytowego.



Rys. 6.58. a) widok z góry 16-modułowej płyty *modified Quartex* i pasma płytowego (na różowo oznaczono odpowiadające sobie węzły), b) modele płyt, c) modle pasm

Tabela 6.30. *Porównanie przemieszczeń 16-modułowej płyty modified Quartex i pasma płytowego*

	płyta swobodnie podparta						płyta wspornikowa		
	teoria drugiego rzędu			teoria trzeciego rzędu			teoria drugiego rzędu		
S	model PMQ-1x	model MQ16-1	błąd względny	model PMQ-1x	model MQ16-1	błąd względny	model $PMQ\text{-}2x$	model MQ16-2	błąd względny
[kN]	q_{39} [mm]	q_{120} [mm]	Δq [%]	q_{39} [mm]	q_{120} [mm]	Δq [%]	q_{54} [mm]	q_{99} [mm]	Δq [%]
3	-156,339	-156,342	0,00	-17,056	-17,605	-3,11	–	–	–
10	-46,965	-46,967	-0,01	-15,672	-16,131	-2,85	–	–	–
21	-23,527	-23,530	-0,01	-13,751	-14,091	-2,41	-0,737	-0,793	-7,08
30	-15,715	-15,717	-0,02	-11,954	-12,193	-1,95	-0,736	-0,793	-7,08
40	-11,808	-11,811	-0,02	-10,345	-10,505	-1,52	-0,736	-0,792	-7,07
50	-9,465	-9,467	-0,03	-8,962	-9,066	-1,15	-0,736	-0,792	-7,07
60	-7,902	-7,905	-0,03	-7,810	-7,878	-0,86	-0,735	-0,791	-7,08

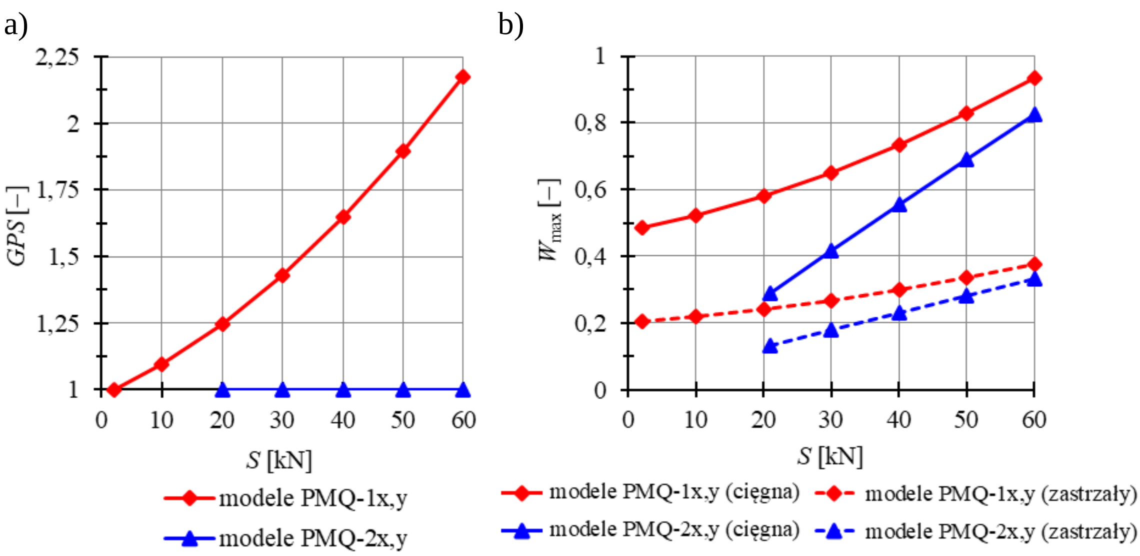
W tabeli 6.31 przedstawiono wybrane parametry statyczne dla modeli pasm charakteryzujących się występowaniem mechanizmu infinitezymalnego, tj. modeli PMQ-1x oraz PMQ1-y. W przypadku analizy ilościowej, kierunek podparcia nie miał znaczenia i uzyskano te same ilości zidentyfikowanych stanów samonaprężenia oraz mechanizmów infinitezymalnych. Analizując otrzymane wyniki, także w przypadku analizy jakościowej, kierunek podparcia nie ma znaczenia, a uzyskane parametry są porównywalne. Kolejno, dla modeli PMQ-1x, PMQ1-y, PMQ-2x oraz PMQ-y, przeanalizowano wpływ stanu samonaprężenia na:

- globalny parametr sztywności GPS (rys. 6.59a),
- wytężenie elementów W_{max} (rys. 6.59b).

Otrzymane rezultaty potwierdzają poprzednie wnioski. W przypadku modeli PMQ-1x i PMQ-y, poziom stanu samonaprężenia ma wpływ na wielkość globalnego parametru sztywności (GPS). Wzrost poziomu stanu samonaprężenia o 1 kN powoduje średni przyrost wartości parametru o 0,0202. Podobnie jak w poprzednich strukturach, wytężenie cięgien jest większe niż zastrzałów i różnica między nimi wzrasta wraz z przyrostem poziomu stanu samonaprężenia. Dla minimalnego poziomu stanu samonaprężenia $S_{\min}$, wytężenia cięgien jest o 57,7% większe od wytężenia zastrzałów, a dla maksymalnego poziomu stanu samonaprężenia $S_{\max}$ – o 59,8%. Dla modeli PMQ-2x i PMQ-2y, poziom stanu samonaprężenia nie ma wpływu na wielkość globalnego parametru sztywności – GPS jest równy 1. Wytężenie elementów konstrukcji zmienia się liniowo wraz z przyrostem poziomu stanu samonaprężenia. Dla minimalnego poziomu stanu samonaprężenia $S_{\min}$, wytężenie cięgien jest o 57,4% większe od wytężenia zastrzałów, a dla maksymalnego poziomu stanu samonaprężenia $S_{\max}$ – o 60,2%.

Tabela 6.31. *Charakterystyki wytrzymałościowe dla modeli PMQ-1x i PMQ1-y*

S **[kN]**	**typ elementu**	Model PMQ-1x ($S_{\min}$ = 1,5 kN)			Model PMQ-1y ($S_{\min}$ = 2 kN)		
		N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]	N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]
$S_{\min}$	cięgna	54,1	0,491	1,0	52,7	0,478	1,0
	zastrzały	-40,2	0,207		-39,2	0,202	
60	cięgna	103,3	0,937	2,2	102,6	0,931	2,2
	zastrzały	-73,0	0,377		-72,5	0,374	

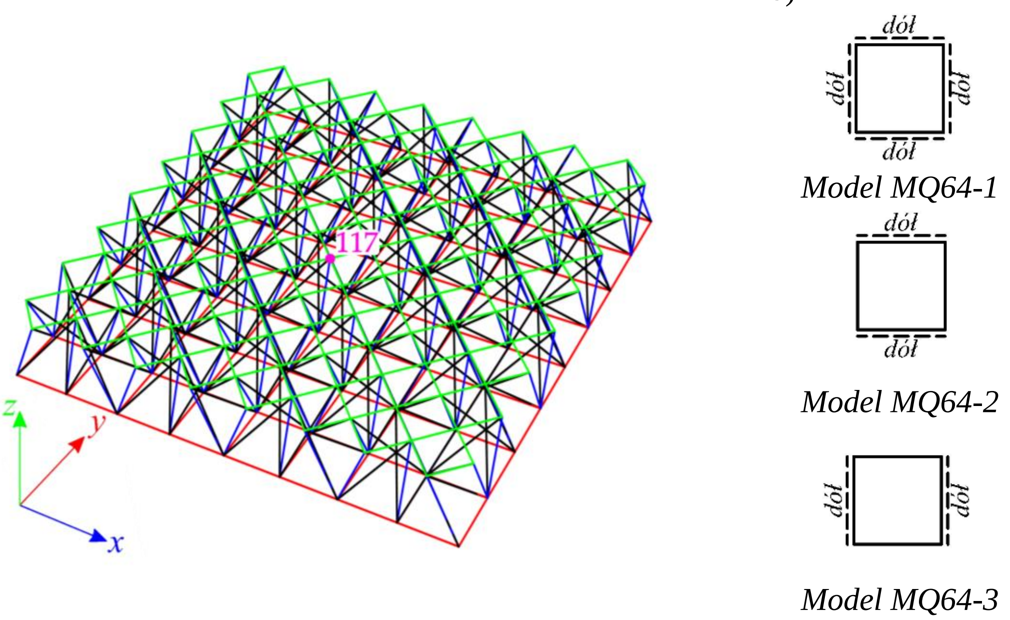


Rys. 6.59. Wpływ stanu samonaprężenia S na: a) globalny parametr sztywności GPS, b) wytężenie elementów W_{max} dla modeli PMQ-1x i PMQ-1y pasma płytowego zbudowanego z modułów *modified Quartex*

6.6.3. 64-modułowa płyta *modified Quartex*

Następną rozważaną strukturą jest płyta składająca się z 64 modułów *modified Quartex* (rys. 6.15). Wszystkie analizowane struktury są kratownicami (***K***), zastrzały znajdują się wewnątrz układu elementów rozciąganych (***W***) o pomijalnie małej sztywności na ściskanie (***C***). We wszystkich rozpatrywanych 10 modelach wystąpiły stany samonaprężenia (***S***), których liczba zależy od liczby zablokowanych stopni swobody. Stabilność układu zapewniła superpozycja stanu naprężenia uzyskanego dla pojedynczej struktury. We wszystkich analizowanych modelach MQ64-1 – MQ64-3 występuje mechanizm infinitezymalny (***M***), więc zaliczono je do konstrukcji o cechach tensegrity klasy 1. Analiza ilościowa 64-modułowej płyty *modified Quartex* jest zawarta w 5.6.3.

a) b)



Rys. 6.60. 64-modułowa płyta *modified Quartex*

Rozpatrywane modele obciążono obciążeniem równomiernie rozłożonym o wartości $q_z = -1{,}5\ \mathrm{kN/m^2}$, działającym w kierunku osi z, przyłożonym do górnej płaszczyzny płyty.

Przeanalizowano wpływ stanu samonaprężenia na:

- przemieszczenia wybranych węzłów (rys. 6.61a-b),
- globalny parametr sztywności GPS (rys. 6.61c),
- wytężenie elementów W_{max} (rys. 6.61d).

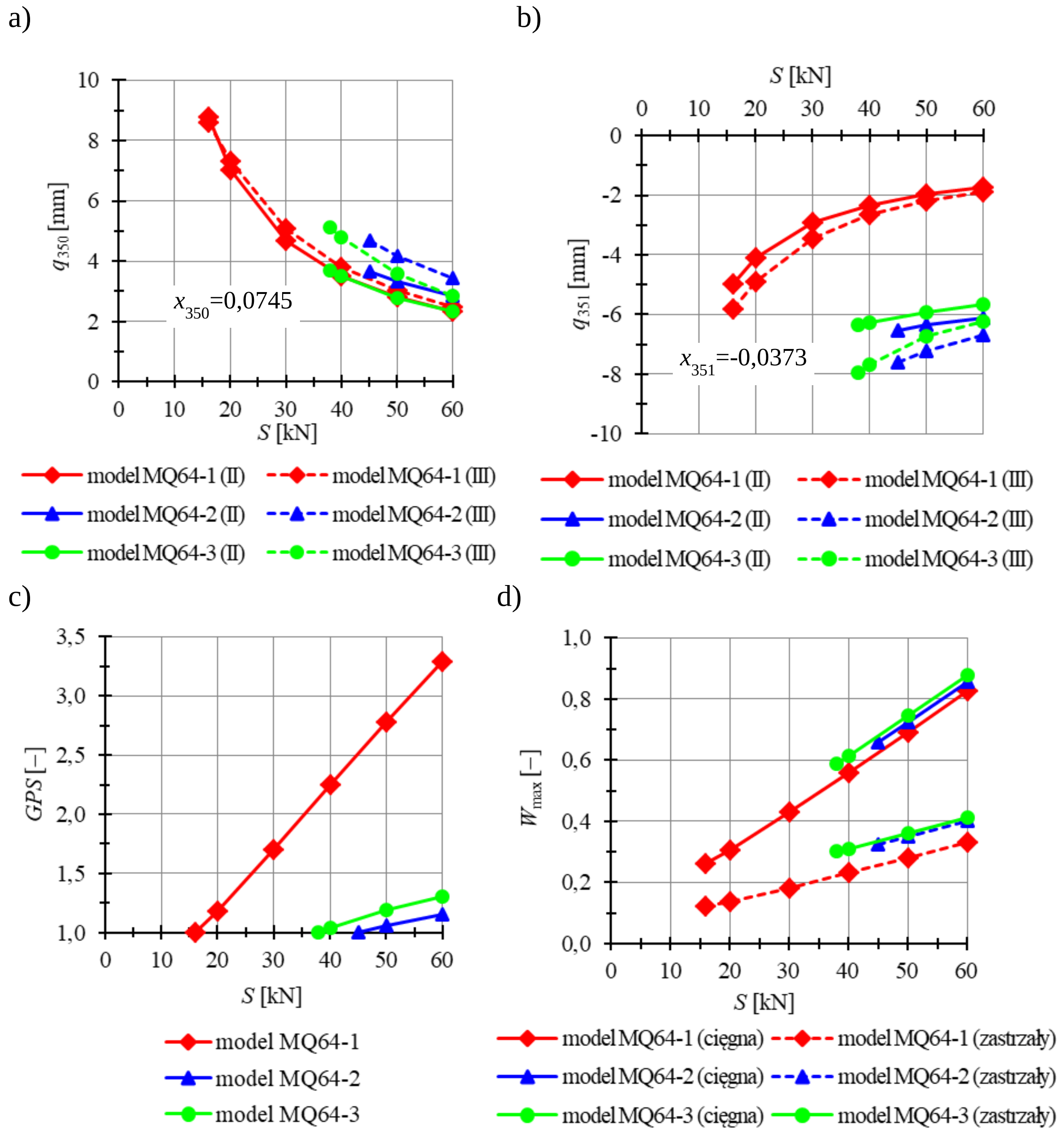
W tabeli 6.32 zawarto wybrane parametry statyczne otrzymane dla minimalnego i maksymalnego poziomu stanu samonaprężenia.

Minimalny poziom stanu samonaprężenia dla analizowanych 64-modułowych modeli zależy od sposobu podparcia i jest równy kolejno $S_{\min} = 16\ \mathrm{kN}$ dla MQ64-1, $S_{\min} = 45\ \mathrm{kN}$ dla MQ64-2 i $S_{\min} = 38\ \mathrm{kN}$ dla MQ64-3. Maksymalny poziom stanu samonaprężenia jest równy $S_{\max} = 60\ \mathrm{kN}$ i odpowiada maksymalnemu wytężeniu cięgien na poziomie 85,7%. Ze względu na dość wysokie wartości poziomu stanu samonaprężenia, wpływ nieliniowości nie jest tak znaczny jak w przypadku poprzednio analizowanych modeli. Przykładowo, dla modelu MQ64-3, dla minimalnego poziomu stanu samonaprężenia $S_{\min}$ błąd względny pomiędzy rezultatami otrzymanymi przy zastosowaniu teorii drugiego (II) i trzeciego (III) rzędu wynosi 19,8% dla q_{351} i 28,3% dla q_{350}, natomiast dla maksymalnego poziomu stanu samonaprężenia $S_{\max}$ – odpowiednio 8,92% i 18,7% (rys. 6.16a,b). Dodatkowo, warto zauważyć, że kierunek podparcia dla płyty 64-modułowej nie jest aż tak znaczący jak dla płyty 4-modułowej. Pomiędzy modelami MQ64-2 a MQ64-3 nie uzyskano aż takich różnić jak dla modeli MQ4-2 i MQ4-3. W przypadku płyt 4-modułowych, stosunek składowych opisujących deformację i wartości uzyskanych przemieszczeń był zachowany dla wszystkich wartości poziomu stanu samonaprężenia – dla modeli MQ4-1 – MQ4-3 przemieszczenie poziome było dwa razy większe niż poziomie. Dla modeli 64-modułowych zależność ta nie jest zachowana – stosunek składowych opisujących deformację wciąż pozostaje równy 2, natomiast stosunek przemieszczenia poziomego i pionowego dla minimalnego poziomu stanu samonaprężenia $S_{\min}$ wynosi 1,77, natomiast dla maksymalnego poziomu stanu samonaprężenia $S_{\max}$ – 1,35.

Porównując dane zawarte w tabeli 6.32 i na rysunku 6.61c można stwierdzić, że model MQ64-1 jest najsztywniejszy. Przyrost poziomu stanu samonaprężenia o 1 kN powoduje średni przyrost współczynnika GSP o 0,0526 dla tego modelu. Dla modelu MQ4-1 ten sam przyrost poziomu stanu samonaprężenia powoduje średni przyrost GPS o 0.0140, natomiast dla modelu MQ4-3 – o 0.0101. Mniejszy wpływ sprężenia jest także widoczny dla wartości wytężenia elementów konstrukcji. Zależność pomiędzy poziomem stanu samonaprężenia a wytężeniem $W_{\max}$ jest liniowa. Dla wytężenia cięgien modelu MQ64-1 współczynnik determinacji $R^2 = 0{,}9995$, dla zastrzałów – $R^2 = 0{,}9987$, natomiast dla modeli MQ64-2 i MQ64-3 dla wytężenia cięgien i zastrzałów współczynnik determinacji $R^2 = 1{,}0000$. Podobnie jak w przypadku poprzednich płyt, wytężenie cięgien jest większe niż wytężenie zastrzałów. Dla modelu MQ4-1 wytężenie cięgien jest o 53,2% większe niż zastrzałów przy minimalnym poziomie stanu samonaprężenia $S_{\min}$ i o 59,7%. przy maksymalnym poziomie stanu samonaprężenia $S_{\max}$.

Tabela 6.32. *Charakterystyki wytrzymałościowe dla modeli MQ64-1 – MQ64-3*

S [kN]	**typ element**	*Model P64-1* ($S_{\min} = 16$ kN)			*Model P64-2* ($S_{\min} = 45$ kN)			*Model P64-3* ($S_{\min} = 38$ kN)		
		N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]	N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]	N_{max} [kN]	W_{max} [−]	GPS [−]
$S_{\min}$	cięgna	28,9	0,262	1,0	72,5	0,658	1,0	64,8	0,588	1,0
	zastrzały	-23,7	0,123		-63,0	0,324		-58,4	0,301	
60	cięgna	91,1	0,827	3,3	94,4	0,857	1,2	97,0	0,880	1,3
	zastrzały	-64,6	0,333		-77,9	0,402		79,9	0,412	



Rys. 6.61. Wpływ stanu samonaprężenia S na: a) przemieszczenia q_{351}, b) przemieszczenia q_{350}, c) globalny parametr sztywności GPS, d) wytężenie elementów W_{max} 64-modułowej płyty *modified Quartex*

6.7. Podsumowanie

W rozdziale 6 przeprowadzono analizę ilościową struktur tensegrity. Rozpatrzono zachowanie podstawowych pojedynczych modułów tensegrity (*Simplex, modified Simplex, Quartex, modified Quartex* oraz *expanded Octahedron*) oraz wybranych konstrukcji powierzchniowych zbudowanych za pomocą tych modułów, rozważanych w rozdziale 5. Przeanalizowano wpływ poziomu stanu samonaprężenia na przemieszczenia węzłów, globalny parametr sztywności GPS oraz wytężenie elementów W_{max}, zarówno dla konstrukcji charakteryzujących się występowaniem mechanizmu, tj. zakwalifikowanych jako *idealne tensegrity* lub *konstrukcje o cechach tensegrity klasy 1*, jaki i konstrukcji bez mechanizmu – *konstrukcji o cechach tensegrity klasy 2*.

W przypadku konstrukcji charakteryzujących się obecnością mechanizmu, wzrost poziomu stanu samonaprężenia znacząco wpływa na zmniejszenie przemieszczeń. Struktury te usztywnia obciążenie zewnętrzne, powodujące dodatkowe sprężenie konstrukcji. Przeprowadzone analizy wykazały, że wpływ stanu samonaprężenia na całkowitą sztywność struktury jest większy przy mniejszym obciążeniu oraz, że wpływ obciążenia jest najbardziej znaczący przy małych wartościach sił wstępnego sprężenia.

W przypadku konstrukcji geometrycznie niezmiennych przy zerowym stanie samonaprężenia, wprowadzenie samorównoważnych układów sił wewnętrznych powoduje liniowy wzrost sztywności i nośności. Zmiany te nie wpływają na wielkość przemieszczeń.

W rozważaniach struktur tensegrity charakteryzujących się występowaniem mechanizmu niezbędne jest uwzględnienie dużych przemieszczeń i zastosowywanie analizy nieliniowej (teorii III rzędu). Podejście quasi-liniowe (teoria II rzędu) jest niewłaściwe, szczególnie w przypadku poziomu stanu samonaprężenia dążącego do zera, dla którego przemieszczenia rosną do nieskończoności. Teoria II rzędu jest wystarczająca tylko do analizy *konstrukcji o cechach tensegrity klasy 2*.

Wielomodułowe konstrukcje tensegrity charakteryzują się występowaniem kilku stanów samonaprężenia, które w większości przypadków nie identyfikują poprawnie elementów ściskanych i rozciąganych. W takim przypadku konieczna jest superpozycja stanów samonaprężenia, co wymaga dodatkowego nakładu pracy. Najwłaściwszym wówczas podejściem jest uwzględnienie stanu samonaprężenia uzyskanego dla pojedynczego modułu. Dodatkowo, dla struktur wielomodułowych niezbędne jest określenie minimalnego i maksymalnego poziomu stanu samonaprężenia. W niektórych przypadkach obciążenie zewnętrzne powoduje niepoprawny rozkład sił normalnych, który skorygować należy odpowiednio dobranym poziomem sił sprężających. Minimalny poziom stanu samonaprężenia musi poprawnie identyfikować elementy układu, tj. cięgna muszą być rozciągane, natomiast zastrzały – ściskane. Maksymalny poziom nie powinien z kolei powodować przekroczenia nośności elementów.

Przeprowadzone analizy wykazały, że sprawdzenie stabilności konstrukcji poprzez weryfikację wartości własnych macierzy $\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\sigma(\mathbf{S})$ jest niewystarczające. Na przykładzie 64-modułowej płyty *Quartex* i 18-modułowej płyty *Simplex* nie udało się uzyskać poprawnego rozwiązania. Dopiero sprawdzenie wartości własnych macierzy $\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_G(\mathbf{S}) + \mathbf{K}_{NL}(\mathbf{q})$ wykazało niestabilność konstrukcji.

W kolejnej części pracy, skupiono się na konstrukcjach zbudowanych z modułu *modified Quartex*. Dla grupy struktur zbudowanych z tego modułu udowodniono możliwość stosowania uproszczonego podejścia dla pasm płytowych. Ponadto, ze względu na geometrię modułu, można je łatwo łączyć wzajemnie w proste, prostokątne układy.

ROZDZIAŁ 7.

WERYFIKACJA MODELU KONTYNUALNEGO

7.1. Wprowadzenie

Ostatnim etapem rozprawy doktorskiej jest walidacja zaproponowanego w rozdziale 4.4 modelu kontynualnego struktur tensegrity. Rozważono dwa rodzaje konstrukcji. W celu zweryfikowania poprawności procedury, najpierw rozpatrzono konstrukcję płytową, która jest geometrycznie niezmienna. W kolejnym kroku rozpatrzono płytę i pasmo zbudowane z modułów *modified Quartex*. W obu przypadkach, rozważania należało rozpocząć od wyznaczenia ekwiwalentnych współczynników macierzy sprężystości dla niepodpartej powtarzalnej jednostki konstrukcyjnej o własnościach ortotropowych. W przypadku konstrukcji „nie tensegrity" powtarzalną jednostką jest pojedynczy moduł konstrukcji, natomiast dla struktur *modified Quartex* rozpatrzono moduł podstawowy zbudowany z czterech zmodyfikowanych modułów *Quartex*. Po wyprowadzeniu ekwiwalentnych charakterystyk powtarzalnego modułu struktury, dla zbudowanych z tych jednostek konstrukcji wyznaczono przemieszczenia i porównano je z przemieszczeniami otrzymanymi przy modelowaniu dyskretnym.

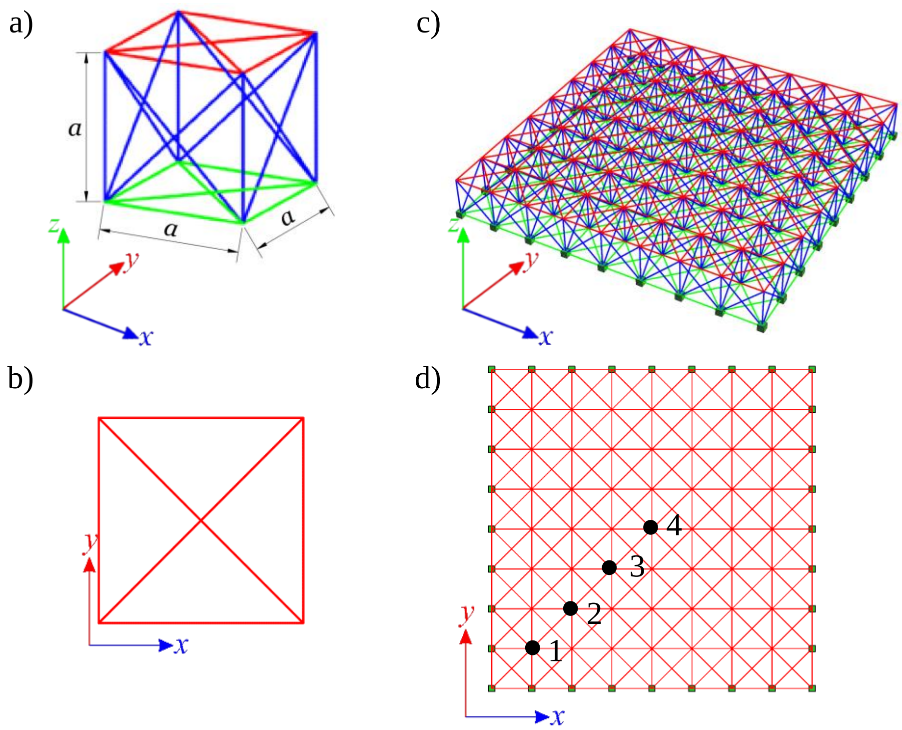
W modelowaniu kontynualnym należy rozróżnić dwie różne procedury. Pierwsza procedura to zastosowanie w rozważaniach macierzy **E** zgodnie z (4.94) (bez kondensacji statycznej). W drugim ujęciu macierz **E** przyjęto zgodnie z (4.93) (pełna procedura). W modelowaniu dyskretnym (MES) zastosowano trzy ujęcia: liniowe (teoria pierwszego rzędu), quasi-liniowe (teoria drugiego rzędu) i nieliniowe (teoria trzeciego rzędu).

7.2. Model „nie tensegrity"

W celu weryfikacji poprawności zastosowanej procedury rozpatrzono swobodnie podpartą płytę. Struktura zbudowana jest z sześćdziesięciu czterech powtarzalnych jednostek modułów sześciennych o wymiarze a (rys. 7.1). Powtarzalna jednostka (rys. 7.1a), a tym samym cała struktura, ma właściwości ortotropowe. Analizowana struktura płytowa nie jest tensegrity ze względu na brak mechanizmów i stanów samonaprężenia $\mathbf{y}_S = \mathbf{0}$. Dla takiej konstrukcji macierz sztywności przyjęta w rozważaniach macierz składa się tylko z części liniowej $\mathbf{K} = \mathbf{K}_L$. Przyjęto, że wszystkie elementy struktury wykonane są ze stali o module Younga E i profilu o polu przekroju poprzecznego A. Równoważne właściwości macierzy sprężystości uzyskano pomijając wyrażenia związane z gradientami odkształceń i otrzymano:

$$\mathbf{E} = \frac{EA}{a}\begin{bmatrix} 6{,}83 & 1.41 & 0 & 0 & 0 \\ & 6{,}83 & 0 & 0 & 0 \\ & & 6{,}83 & 0 & 0 \\ & & & 5{,}65 & 0 \\ sym. & & & & 5{,}65 \end{bmatrix}. \tag{7.1}$$

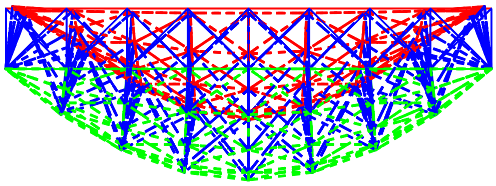
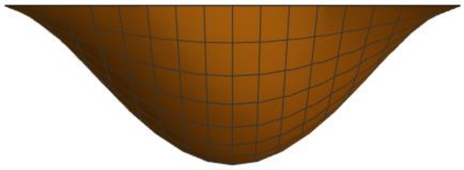
Model dyskretny składa się z dziewięciuset trzynastu elementów ($n = 913$), stu sześćdziesięciu dwóch węzłów ($w = 162$) i trzystu dziewięćdziesięciu stopni swobody ($m = 390$). Ze względu na brak mechanizmów stosowana jest teoria pierwszego rzędu.



Rys. 7.1. Struktura „nie tensegrity”: a) moduł powtarzalny – widok 3D, b) moduł powtarzalny – widok z góry, c) struktura – widok 3D, d) struktura – widok z góry

Przemieszczenia konstrukcji obliczono przy uwzględnieniu równomiernie rozłożonego obciążenia $p = -5\,\mathrm{kN/m^2}$ przyłożonego na górną powierzchnię konstrukcji. Porównanie przemieszczeń uzyskanych według modelu dyskretnego i modelu kontynualnego przedstawiono w tabeli 7.1. Porównując wyniki numeryczne można zauważyć, że metoda daje wyniki z wystarczającą dokładnością. Największy błąd względny uzyskuje się dla maksymalnego przemieszczenia (punkt 4 – rys. 7.1d).

Z kolei porównując kształt zdeformowanej struktury (rys. 7.2) można zauważyć, że przyjęty szereg Fouriera jako funkcja ugięcia $w(x,y) = w_0 \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}$ nie opisuje dokładnie kształtu struktury.

a)  b) 

Rys. 7.2. Zdeformowana struktura: a) model dyskretny, b) model kontynualny

Tabela 7.1. *Porównanie maksymalnego przemieszczenia dla konstrukcji płytowej nie tensegrity*

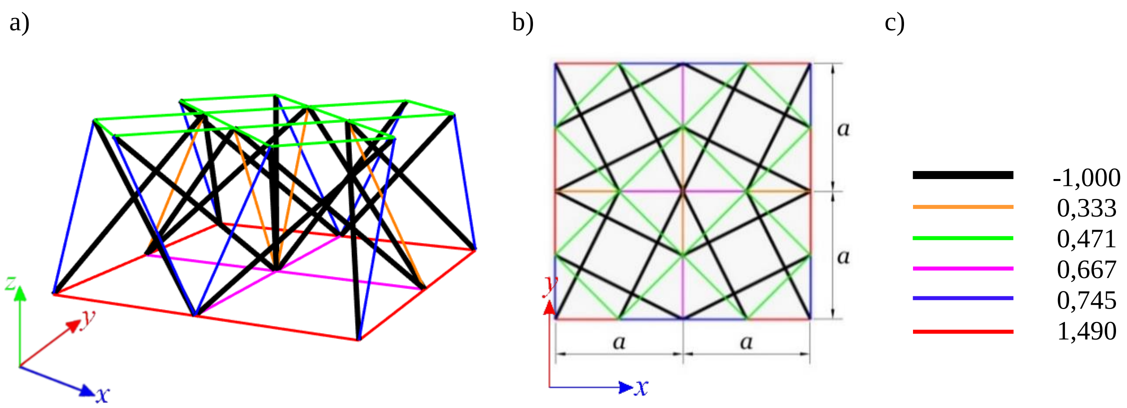
Lp. punktu (rys. 7.1d)	Przemieszczenia $[a/\mathrm{EA}]$		Błąd względny [%]
	model dyskretny	model kontynualny	
1	34440	32261,2	6,71
2	103530	110147	-6,29
3	168000	188032	-11,88
4	193410	220293	-13,90

7.3. Moduł ortotropowy tensegrity

Głównym celem pracy jest wykorzystanie ortotropowego modelu kontynualnego do budowy dwuwarstwowych kratownic tensegrity. Zaproponowano niepodparty moduł podstawowy zbudowany ze modułów *modified Quartex*. Pojedynczy zmodyfikowany moduł Quartex (5.2.3) składa się z 4 zastrzałów, 12 cięgien i ma wymiary pozwalające zmieścić się w sześcianie jednostkowym, czyli $a = 1$. Cztery pojedyncze moduły połączono osiowosymetrycznie w celu uzyskania właściwości ortotropowych. Analizowany moduł podstawowy jest strukturą tensegrity charakteryzującą się 7 mechanizmami (6 skończonymi i jednym nieskończenie małym) oraz 4 stanami samonaprężenia. W analizie ilościowej uwzględnia się stan naprężenia własnego $\mathbf{y}_S$ dla pojedynczego modułu *modified Quartex* Określono samozrównoważony układ sił normalnych $\mathbf{S}$ w funkcji wstępnego naprężenia wstępnego S ($\mathbf{S} = \mathbf{y}_S S$). Przyjęto, że wszystkie elementy wykonane są ze stali o module Younga E oraz z profilu o polu przekroju poprzecznego odpowiednio A_c dla cięgien i A_z dla zastrzałów. Równoważne współczynniki macierzy sprężystości modelu kontynualnego uzyskano w dwojaki sposób. W pierwszym podejściu przez pominięcie terminów związanych z gradientami odkształceń (4.87), a w drugim – przez kondensację statyczną (4.88). W pierwszym uproszczonym podejściu możliwe jest uzyskanie postaci zamkniętych równoważnych współczynników macierzy sztywności:

$$\begin{gathered} d_{11} = d_{22} = (9.10EA_c + 2.52EA_z)/a, \\ d_{12} = (2.83EA_c + 1.19EA_z)/a, \\ d_{44} = (11.31EA_c + 4.74EA_z)/a, \\ d_{55} = d_{66} = (4.29EA_c + 11.85EA_z)/a. \end{gathered} \tag{7.2}$$

Analizując wzory (7.2) można zauważyć, że współczynniki macierzy **E** nie zależą od poziomu naprężenia wstępnego S. W drugim podejściu (procedura pełna) nie jest możliwe uzyskanie wyników w postaciach zamkniętych i możliwe są uzyskanie jedynie wartości liczbowych.

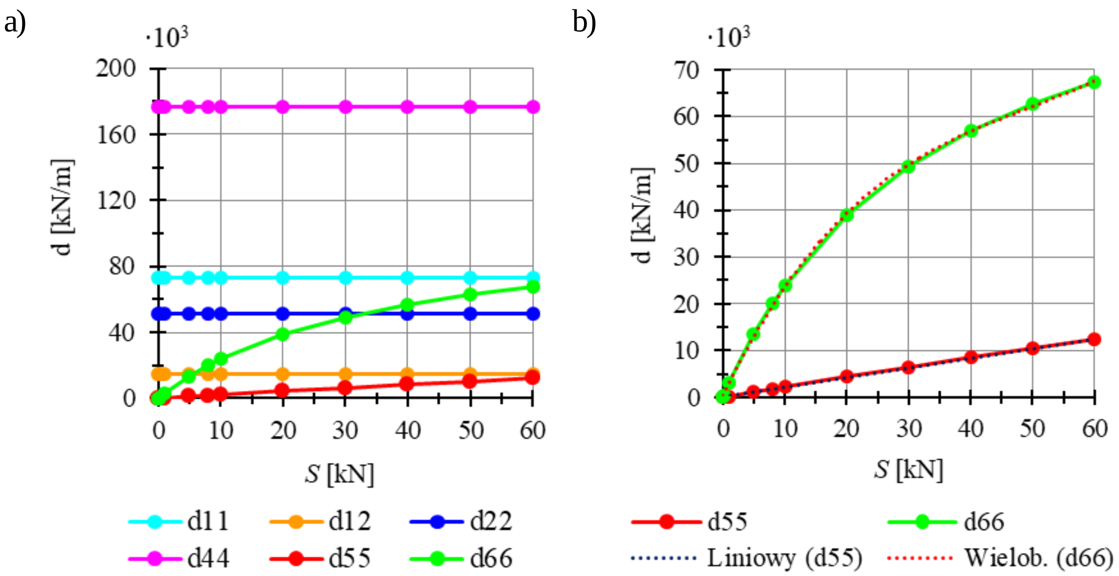


Rys. 7.3. Podstawowy model ortotropowy: a) widok 3D, b) widok z góry, c) siły stanu samonaprężenia

Przyjęto, że cięgna (oznaczone liniami w kolorze czerwonym, różowym, pomarańczowym, zielonym lub niebieskim na rys. 7.3, odpowiednio do siły stanu samonaprężenia) wykonane są ze stali S460N. Zastosowano kable typu A o module Younga $E = 210$ GPa. Zastrzały (zaznaczone czarnymi liniami) wykonane są z rury okrągłej walcowanej na gorąco (stal S355J2) o module Younga $E = 210$ GPa. Gęstość stali wynosi $\rho = 7860\ \mathrm{kg/m^3}$. Jako cięgna przyjęto pręty o średnicy $\phi = 20$ mm i polu przekroju poprzecznego $A_c = 3{,}14\ \mathrm{cm^2}$, natomiast jako zastrzały – rury o średnicy $\phi = 76{,}1$ mm, grubości $t = 2{,}9$ mm i polu przekroju poprzecznego $A_z = 6{,}88\ \mathrm{cm^2}$. Maksymalny poziom sprężenia przyjmuje się jako $S_{\max} = 60$ kN (maksymalne wytężenie konstrukcji wynosi 0,83). Dla takich danych równoważne współczynniki macierzy sprężystości uzyskane bez kondensacji statycznej (7.1) są równe:

$$d_{11} = d_{22} = 964019\ \mathrm{kN/m}, \quad d_{12} = 357836\ \mathrm{kN/m},$$
$$d_{44} = 1431350\ \mathrm{kN/m}, \quad d_{55} = d_{66} = 1995600\ \mathrm{kN/m}, \tag{7.3}$$

natomiast uzyskane przy zastosowaniu kondensacji statycznej (pełna procedura) przedstawiono na rys. 7.4.



Rys. 7.4. Wpływ wstępnego naprężenia wstępnego S na zastępcze właściwości sztywności uzyskane przy zastosowaniu pełnej procedury: a) wszystkie współczynniki, b) współczynniki zależne od poziomu wstępnego naprężenia *S* (linie kropkowane – linie trendu)

Cztery z sześciu równoważnych współczynników macierzy sztywności, tj. d_{11}, d_{12}, d_{22} i d_{44}, otrzymanych przy zastosowaniu pełnej procedury, praktycznie nie zależą od poziomu wstępnego naprężenia S (rys. 7.4a). Przykładowo, współczynnik d_{11} jest równy odpowiednio $d_{11} = 73201{,}1$ kN dla $S = 0$ i $d_{11} = 73228.8$ kN dla $S_{\max}$– różnica wynosi 0,04%. Średnie wartości tych współczynników to:

$$d_{11} = 73211{,}5\ \mathrm{kN/m},\ d_{12} = 14390{,}9\ \mathrm{kN/m},$$
$$d_{22} = 51377{,}7\ \mathrm{kN/m},\ d_{44} = 176924{,}9\ \mathrm{kN/m}. \tag{7.4}$$

Tylko dwa współczynniki, tj. d_{55} i d_{66}, zależą od poziomu naprężenia wstępnego S. Współczynnik d_{55} wynosi odpowiednio $d_{55} = 0$ kN dla $S = 0$ i $d_{55} = 12306{,}1$ kN dla $S_{\max}$, natomiast d_{66} waha się od 0 do 67408,7 kN. Uzyskane wyniki numeryczne pozwalają na wyznaczenie linii trendu (rys. 7.4b):

$$d_{55} = 206{,}82\, S + 108{,}8\ [\mathrm{kN/m}]$$
$$d_{66} = 0{,}3114\, S^3 - 45{,}629\, S^2 + 2739{,}7\, S + 330{,}56\ [\mathrm{kN/m}] \qquad (7.5)$$

ze współczynnikami determinacji $R^2 = 019992$ odpowiednio dla d_{55} i $R^2 = 0{,}9997$ dla d_{66}.

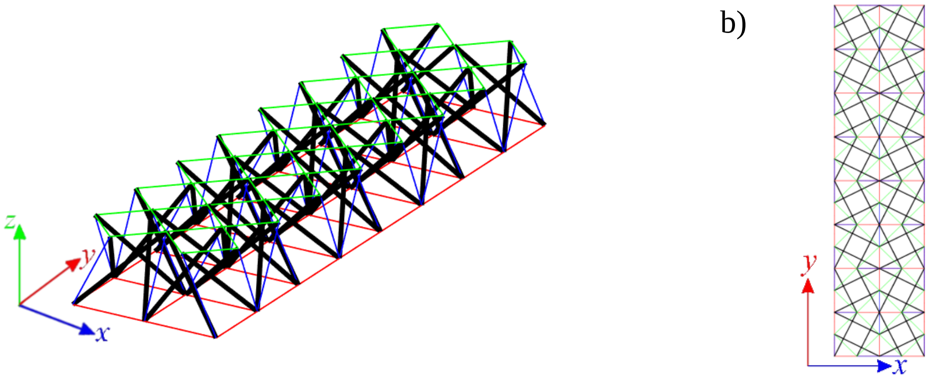
7.4. Struktury tensegrity

Otrzymany podstawowy moduł ortotropowy służy do budowy swobodnie podpartego pasma (rys. 7.5) i płyty tensegrity (rys. 7.6). Pierwsza konstrukcja zbudowana jest z czterech podstawowych modułów, natomiast druga z szesnastu podstawowych modułów. Obie struktury charakteryzują się jednym mechanizmem. Dla takich konstrukcji przyjęto teorię drugiego rzędu. Dla porównania, zastosowano dwa zestawy równoważnych współczynników macierzy sprężystości: wyznaczone bez kondensacji statycznej i wyznaczone w pełnej procedurze. Dyskretny model struktury belkowej składa się z dwustu dwunastu elementów ($n = 212$), sześćdziesięciu dziewięciu węzłów ($w = 69$) i stu pięćdziesięciu dziewięciu stopni swobody ($m = 159$). Z kolei struktura płytkowa składa się z ośmiuset elementów ($n = 800$), dwustu dwudziestu pięciu węzłów ($w = 225$) i pięciuset siedemdziesięciu dziewięciu stopni swobody ($m = 579$). W obu przypadkach stosuje się teorię drugiego rzędu i teorię trzeciego rzędu. Obie konstrukcje są obciążone równomiernie rozłożonym obciążeniem $p = -1{,}5\,\mathrm{kN/m^2}$ przyłożonym do górnej powierzchni konstrukcji.

Porównanie wyników uzyskanych dla pasma dla ujęcia dyskretnego i kontynualnego przedstawiono na rys. 7.6a, natomiast dla struktury płytowej – na rys. 7.6b. Ponieważ model kontynualny został wyprowadzony z macierzy teorii quasi-liniowej (teorii drugiego rzędu), wyniki należy porównać z rezultaty należy porównywać z tymi otrzymanymi poprzez model dyskretny z zastosowaniem teorii drugiego rzędu (czerwona linia ciągła). Modelowanie kontynualne bez kondensacji statycznej (niebieska linia) daje niewłaściwe wyniki, ponieważ równoważne współczynniki macierzy sprężystości nie zależą od poziomu naprężenia wstępnego. Kondensacja statyczna zaproponowana w pracy zapewnia dokładniejsze wyniki i jest lepszym przybliżeniem modelu dyskretnego (zielona linia). W przypadku struktur płytowych funkcja ugięcia nie jest dokładna (jak pokazano na przykładzie struktury „nie tensegrity”), ale w przypadku konstrukcji belkowej użycie funkcji wielomianu jako funkcji ugięcia daje lepsze dopasowanie.

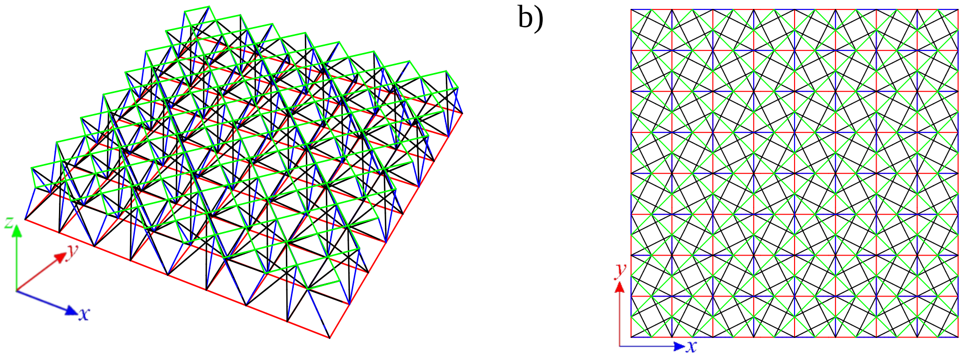
Różnice między modelem dyskretnym a proponowanym modelem kontynualnym wynikają z zastosowania teorii drugiego rzędu. Podejście to nie uwzględnia usztywnienia konstrukcji pod wpływem obciążenia zewnętrznego. W dalszych rozważaniach należy również wziąć pod uwagę nieliniowość (teoria trzeciego rzędu, zaznaczona czerwoną linią przerywaną), która daje dokładny wynik dla struktur tensegrity. Niedokładność wyników może być również spowodowana zastosowaniem konwencjonalnych współczynników ścinania α_i. Należy zweryfikować ich wartości.

a) b)

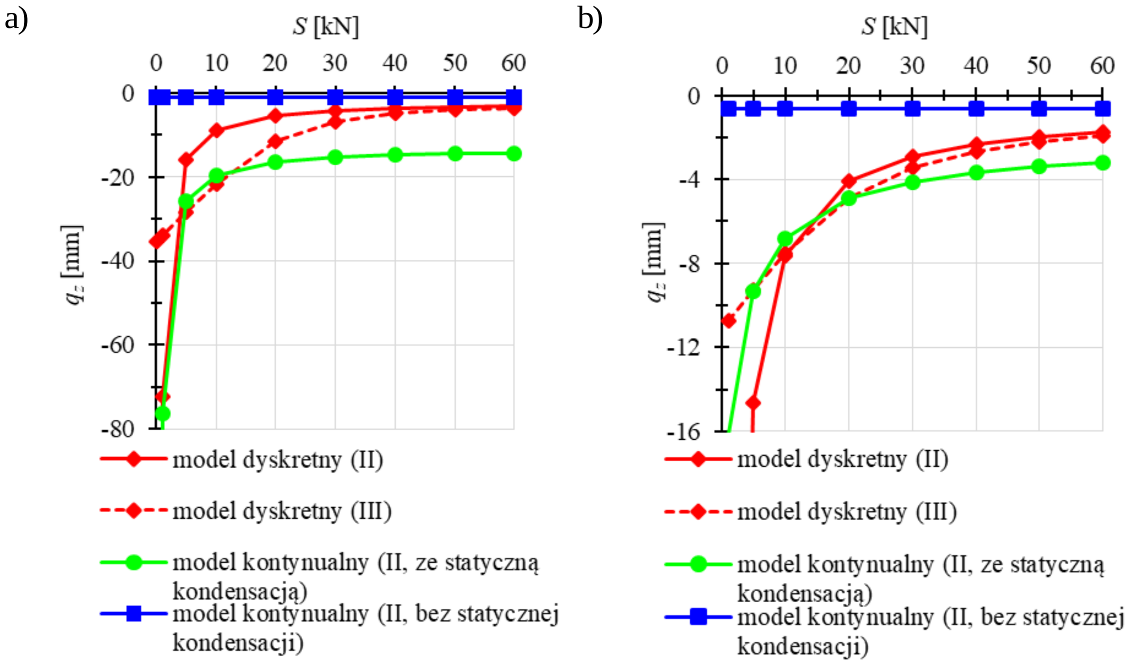


Rys. 7.5. Belka tensegrity: a) widok 3D, b) widok z góry

a) b)



Rys. 7.6. Płyta tensegrity: a) widok 3D, b) widok z góry



Rys. 7.7. Porównanie maksymalnego przemieszczenia dla: a) pasma, b) płyty tensegrity

7.5. Podsumowanie

Przedstawione wyniki są pierwszą próbą weryfikacji modelowania kontynualnego pasm i płyt tensegrity charakteryzujących się mechanizmami. Analiza literatury wykazała, że istniejące prace zawierają jedynie sprawdzenie współczynników ekwiwalentnej macierzy sprężystości modelu kontynualnego, a nie sprawdzenie globalnego zachowania struktur tensegrity. Otrzymane wyniki walidacji modelu kontynualnego dają zadowalającą dokładność, ale można je jeszcze poprawić. Aby w pełni zbadać potencjał modelowania kontynualnego, należy podać więcej przykładów, aby wyciągnąć bardziej ogólny wniosek. Jak pokazano na przykładzie konstrukcji niebędącej tensegrity, odkształcony kształt struktury modelowanej dyskretnie jest inny niż struktury modelowanej w ujęciu kontynualnym. W przypadku płyt lepsze dopasowanie funkcji kształtu można uzyskać za pomocą funkcji wielomianowej zamiast szeregu Fouriera. W rozważaniach modelu kontynualnego należy uwzględnić styczną macierz sztywności (teoria trzeciego rzędu). W pracy uwzględniono liniową i geometryczną macierz sztywności (teoria drugiego rzędu). Nie jest to wystarczające podejście i zostało zastosowane ze względu na swoją prostotę w celu sprawdzenia celowości stosowania proponowanego podejścia kontynualnego. Kolejnym aspektem, który może mieć wpływ na wyniki, jest konieczność weryfikacji zastosowania konwencjonalnych współczynników ścinania w sześcioparametrowej teorii powłok. Ze względu na fakt, iż na zachowanie struktur tensegrity istotny wpływ ma istnienie stanu samonaprężenia, współczynniki ścinania prawdopodobnie powinny zmieniać się wraz ze zmianą poziomu sprężenia.

Rozdział 8.

Podsumowanie

Przedmiotem rozważań pracy doktorskiej jest analiza parametryczna dwuwarstwowych kratownic typu tensegrity, zbudowanych z podstawowych modułów tensegrity, takich jak: *Simplex*, *Quartex* i *expanded Octahedron.* Analiza takich struktur jest dwuetapowa. Pierwszy etap obejmuje ocenę jakościową, która polega na identyfikacji cech charakterystycznych i klasyfikacji konstrukcji do jednej z czterech grup. Klasyfikacja zależy głównie od dwóch najważniejszych (immanentnych) cech, tj. stanów samonaprężenia (wstępnego sprężenia) i mechanizmów infinitezymalnych. Właściwa klasyfikacja jest niezbędna do oceny zachowania konstrukcji pod wpływem oddziaływań zewnętrznych, czyli drugiego etapu analizy (ocena ilościowa). Analizę jakościową przeprowadzono wykorzystując analizę spektralną macierzy kratownic.

Ocenę ilościową, obejmującą obliczenia odpowiedzi konstrukcji na działanie obciążeń niezależnych od czasu, przeprowadzono stosując dwa podejścia, tj. model dyskretny i kontynualny.

W przypadku ujęcia dyskretnego, do opisu zachowania struktur tensegrity przyjęty został model quasi-liniowy i geometrycznie nieliniowy. W tym drugim przypadku uwzględniono duże gradienty przemieszczeń, ale małe gradienty odkształceń. Jako podstawę do sformułowania równań kratownic tensegrity przyjęto częściowo nieliniową teorię sprężystości w ujęciu *Total Lagrangian – TL* (stacjonarny opis Lagrange'a). Przeprowadzono statyczną analizę parametryczną, ze szczególnym uwzględnieniem wpływu wstępnego sprężenia na przemieszczenia, nośność i sztywność szerokiego spektrum konstrukcji. W pracy rozpatrzono szerokie spektrum konstrukcji w celu oceny zachowania się struktur tensegrity pod wpływem obciążenia. W celu miarodajnej oceny wprowadzono parametr, który określa wpływ stanu samonaprężenia na całkowitą sztywność struktury przy zadanym obciążeniu. Udowodniono, że sztywność konstrukcji zależy nie tylko od geometrii i właściwości materiałowych, ale również od poziomu stanu samonaprężenia i od obciążenia zewnętrznego. Przeprowadzone analizy wykazały, że wpływ stanu samonaprężenia na całkowitą sztywność struktury jest większy przy mniejszym obciążeniu oraz, że wpływ obciążenia jest najbardziej znaczący przy małych wartościach sił wstępnego sprężenia. Przeprowadzona w pracy analiza wykazała, że sterowanie parametrami statycznymi jest możliwe tylko w przypadku konstrukcji charakteryzujących się występowaniem mechanizmu infinitezymalnego. W literaturze mianem *tensegrity* nazywane są również konstrukcje, w których nie występuje mechanizm. W pracy takie konstrukcje nazwano s*trukturami o cechach tensegrity klasy 2* – struktury te są niewrażliwe na poziom stanu samonaprężenia.

Szerokie spektrum konstrukcji rozważonych w ujęciu dyskretnym stanowi bazę do kolejnego etapu rozważań, czyli walidacji modelu kontynualnego. W przypadku ujęcia kontynualnego, niezbędne jest określenie rodzaju symetrii „materiału” i wyznaczenie ekwiwalentnej macierzy sprężystości. W tym celu, w pracy przyjęto procedurę zwaną metodą równoważnej energii. Podstawą tego podejścia jest założenie, że energia odkształcenia elementów skończonych zdeformowanej kratownicy tensegrity zawiera taką samą energię jak analogiczny model kontynualny tejże kratownicy. Za pomocą procedury przedstawionej w niniejszej pracy wyznaczono ekwiwalentną macierz sprężystości. W pracy podjęto próbę analizowania zachowania się ortotropowych płyt typu tensegrity i w tym celu wykorzystano sześcioparametrową teorię powłok. Uzyskane rezultaty wykazują słuszność stosowania podejścia kontynualnego, ale wymagane jest jeszcze dodatkowe uszczegółowienie przeprowadzonych analiz poprzez uwzględnienie modelu anizotropowego, nieliniowości, walidację współczynników ścinania oraz funkcji aproksymującej przemieszczenia.

Na potrzeby przeprowadzonych rozważań oba zastosowane w pracy podejścia obliczeniowe do struktur tensegrity, tj. model dyskretny i kontynualny, zostały zaimplementowane w środowisku *Mathematica*. W celu rozważenia struktur w ujęciu dyskretnym z uwzględnieniem teorii III rzędu, rozwiązać należało nieliniowy układ równań. W pracy zastosowano w tym celu metodę Newtona-Raphsona, implementując ją w autorskim programie napisanym w *Mathematice*. Procedura napisana przez autorkę pozwala analizować konstrukcję o dowolnych charakterystykach geometrycznych i materiałowych. Możliwe jest śledzenie zachowania konstrukcji przy różnym poziomie stanu samonaprężenia. Obciążenie przykładane jest do rozpatrywanej konstrukcji stopniowo, z krokiem zadanym przez użytkownika. Po przeprowadzeniu obliczeń, program automatycznie generuje notkę obliczeniową w formacie *.xlsx,* zawierającą ekstremalne wartości przemieszczeń, przemieszczenia wybranego węzła, współczynnik GPS i maksymalne wytężenie konstrukcji. W celu zastosowania modelowania kontynualnego, napisany został kolejny program, który dla konstrukcji o wybranych parametrach geometrycznych i materiałowych, przeprowadza cztery transformacje macierzowe, opisane w rozdziale 4.4. Aby wyprowadzić jawne postacie wzorów na maksymalne ugięcie pasma i płyty ortotropowej, napisano także procedurę rozwiązującą układ równań różniczkowych (4.54) i (4.71). Użytkownik może wprowadzić dowolną funkcję kształtu i obciążenia, składającą się z wybranej przez siebie liczby członów szeregu Fouriera.

Aby ułatwić generowanie wykresów zawartych w niniejszej pracy, autorka stworzyła także makro w programie *Excel*. Użytkownik tworzy wykres korzystając ze standardowej funkcjonalności programu, a następnie edytuje jego wygląd autorskim makrem. Po wybraniu wykresu (poprzez podanie nazwy bądź klikniecie), można szybko zmienić wygląd linii, znaczników, położenie etykiet osi czy opis osi.

Na podstawie przeprowadzonych w pracy analiz, rozważań i obliczeń, autorka jest w stanie sformułować następujące wnioski:

1. Pełna ocena pracy struktur tensegrity obejmuje dwa etapy: ocenę ilościową i jakościową. Pierwszy etap jest niezbędny w celu prawidłowej identyfikacji immanentnych cech struktur tensegrity oraz zastosowania klasyfikacji konstrukcji tensegrity, co ma istotny wpływ na analizę zachowania konstrukcji pod wpływem obciążenia, będącego przedmiotem rozważań drugiego etapu analizy.
2. Analizę jakościową struktur tensegrity można przeprowadzić tylko za pomocą ujęcia dyskretnego, natomiast analizy ilościowej można dokonać wykorzystując także podejście kontynualne.
3. Szerokie spektrum analiz konstrukcji tensegrity w ujęciu dyskretnym wykazało, że struktury charakteryzujące się obecnością mechanizmu wykazują wrażliwość na zmianę poziomu stanu samonaprężenia, czym istotnie różnią się od struktur geometrycznie niezmiennych.
4. Aktywne sterowanie konstrukcjami tensegrity jest możliwe tylko wtedy, gdy konstrukcja jest klasyfikowana jako *idealne tensegrity* lub *konstrukcja o cechach tensegrity klasy 1*. *Konstrukcje o cechach tensegrity klasy 2*, które są pozbawione mechanizmów, wykazują niewrażliwość na zmianę poziomu sił stanu samonaprężenia.

5. W przypadku struktur geometrycznie zmiennych niezbędne jest zastosowanie analizy nieliniowej (teoria trzeciego rzędu).
6. Dla tych klas sztywność konstrukcji, oprócz geometrii modelu i jego właściwości materiałowych, zależy również od poziomu sił sprężających.
7. W przypadku struktur geometrycznie zmiennych, tj. charakteryzujących się obecnością mechanizmu, w celu wyznaczenia ekwiwalentnej macierzy sprężystości, niezbędne jest uwzględnienie odkształceń i gradientów odkształceń poprzez statyczną kondensację. W przypadku struktur pozbawionych mechanizmu wystarczy proste wykreślanie kolumn i wierszy macierzy połączonych z pomijanymi odkształceniami i gradientami odkształceń.
8. Za pomocą modelowania kontynualnego można ocenić pracę dwuwarstwowych konstrukcji tensegrity z zadowalającą dokładnością, ale proponowane podejście wymaga jeszcze dopracowania.

Planowane kierunki rozwoju pracy naukowej obejmują:

1. Uszczegółowienie modelu kontynualnego poprzez uwzględnienie anizotropii rozpatrywanych struktur, nieliniowości pracy konstrukcji, walidację współczynników ścinania oraz funkcji aproksymującej przemieszczenia.
2. Zastosowanie modelu kontynualnego w analizie powłok tensegrity.
3. Rozwijanie stworzonych programów obliczeniowych.
4. Rozszerzenie rozważań struktur tensegrity o analizę dynamiczną tych ustrojów.
5. Analiza niezawodności dwuwarstwowych kratownic typu tensegrity.

BIBLIOGRAFIA

1. Adam, B., Smith, I. (**2007a**), Tensegrity Active Control: Multiobjective Approach. Journal of Computing in Civil Engineering 21:. https://doi.org/10.1061/(ASCE)0887-3801(2007)21:1(3)

2. Adam, B., Smith, IF. (**2007b**), Self-Diagnosis and Self-Repair of an Active Tensegrity Structure. Journal of Structural Engineering 133:1752–1761. https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(2007)133:12(1752)

3. Adam, B., Smith, IFC. (**2006**), Learning, Self-Diagnosis And Multi-Objective Control Of An Active Tensegrity Structure. W: Pandey M, Xie W-C, Xu L (red) Advances in Engineering Structures, Mechanics & Construction. Springer Netherlands, Dordrecht, s 439–448

4. Adam, B., Smith, IFC. (**2008**), Active tensegrity: A control framework for an adaptive civil-engineering structure. Computers & Structures 86:2215–2223. https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2008.05.006

5. Al Sabouni-Zawadzka, A. (**2014**), Active Control Of Smart Tensegrity Structures. Archives of Civil Engineering 60:. https://doi.org/10.2478/ace-2014-0034

6. Al Sabouni-Zawadzka, A. (**2016**), Studium możliwości zastosowania konstrukcji inteligentnych w budownictwie mostowym. Praca doktorska, Politechnika Warszawska

7. Al Sabouni-Zawadzka, A. (**2023**), High Performance Tensegrity - Inspired Metamaterials and Structures. James Clarke & Company Ltd

8. Al Sabouni-Zawadzka, A., Gilewski, W. (**2014a**), Inteligentne konstrukcje płytowe typu tensegrity w budownictwie komunikacyjnym. Logistyka nr 6:

9. Al Sabouni-Zawadzka, A., Gilewski, W. (**2018a**), Towards unusual mechanical properties of tensegrity lattice metamaterial. MATEC Web of Conferences 196:04093. https://doi.org/10.1051/matecconf/201819604093

10. Al Sabouni-Zawadzka, A., Gilewski, W. (**2018b**), Smart Metamaterial Based on the Simplex Tensegrity Pattern. Materials 11:673. https://doi.org/10.3390/ma11050673

11. Al Sabouni-Zawadzka, A., Gilewski, W. (**2019**), Soft and Stiff Simplex Tensegrity Lattices as Extreme Smart Metamaterials. Materials 12:187. https://doi.org/10.3390/ma12010187

12. Al Sabouni-Zawadzka, A., Gilewski, W. (**2016**), On Orthotropic Properties of Tensegrity Structures. XXV Polish – Russian – Slovak Seminar “Theoretical Foundation of Civil Engineering" 153:887–894. https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.08.217

13. Al Sabouni-Zawadzka, A., Gilewski, W. (**2014b**), Control of Tensegrity Plate due to Member Loss. Procedia Engineering 91:. https://doi.org/10.1016/j.proeng.2014.12.047

14. Al Sabouni-Zawadzka, A., Gilewski, W. (**2015**), Technical Coefficients in Continuum Models of an Anisotropic Tensegrity Module. Procedia Engineering 111:871–876. https://doi.org/10.1016/j.proeng.2015.07.161

15. Al Sabouni-Zawadzka, A., Kłosowska, J., Obara, P., Gilewski, W. (**2016**), Continuum model of orthotropic tensegrity Plate-Like structures with Self-Stress included. 64:501–508

16. Al Sabouni-Zawadzka, A., Zawadzki, A. (**2020a**), In Search of Lightweight Deployable Tensegrity Columns. Applied Sciences 10:. https://doi.org/10.3390/app10238676

17. Al Sabouni-Zawadzka, A., Zawadzki, A. (**2020b**), Simulation of a deployable tensegrity column based on the finite element modeling and multibody dynamics simulations. Archives of Civil Engineering

18. Allen, E., Zalewski, W. (**2012**), Form and Forces: Designing Efficient, Expressive Structures. Wiley

19. Amalina, SN., Oh, CL. (**2018**), Form-finding of four-stage tensegrity mast. 10

20. Amendola, A., Favata, A., Micheletti, A. (**2018**), On the Mechanical Modeling of Tensegrity Columns Subject to Impact Loading. Frontiers in Materials 5:22. https://doi.org/10.3389/fmats.2018.00022

21. Arcaro, V., Adeli, H. (**2019**), Form-finding and analysis of hyperelastic tensegrity structures using unconstrained nonlinear programming. Engineering Structures 191:439–446. https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.04.060

22. Argyris, JH., Scharpf, DW. (**1972**), Large Deflection Analysis of Prestressed Networks. Journal of the Structural Division 98:633–654. https://doi.org/10.1061/JSDEAG.0003179

23. Ashwear, N., Tamadapu, G., Eriksson, A. (**2016**), Optimization of modular tensegrity structures for high stiffness and frequency separation requirements. International Journal of Solids and Structures 80:297–309. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2015.11.017

24. Attig, M., Abdelghani, M., Ben Kahla, N. (**2016**), Output-only modal identification of tensegrity structures. Engineering Structures and Technologies 8:52–64. https://doi.org/10.3846/2029882X.2016.1175323

25. Attig, M., El Ouni, MH., Ben Kahla, N. (**2017**), Dynamic stability analysis of tensegrity systems. European Journal of Environmental and Civil Engineering 23:1–18. https://doi.org/10.1080/19648189.2017.1304275

26. Averseng, J. (**2004**), Mise en œuvre et contrôle des systèmes de tenségrité. Praca doktorska, Université Montpellier II

27. Averseng, J., Jamin, F., Quirant, J. (**2017**), Système de tenségrité déployable et modulaire pour le développement de l'accessibilité

28. Barnes, MR. (**1999**), Form Finding and Analysis of Tension Structures by Dynamic Relaxation. International Journal of Space Structures 14:89–104. https://doi.org/10.1260/0266351991494722

29. Baron, E. (**2002**), On modelling of medium thickness plates with a uniperiodic structure. Journal of Theoretical and Applied Mechanics; Vol 40, No 1 (2002)

30. Bathe, K-J. (**1982**), Finite Element Procedures in Engineering Analysis. Prentice-Hall

31. Baudriller, H., Maurin, B., Cañadas, P., i in. (**2006**), Form-finding of complex tensegrity structures: application to cell cytoskeleton modelling. Comptes Rendus Mécanique 334:662–668. https://doi.org/10.1016/j.crme.2006.08.004

32. Bel Hadj Ali, N. (**2009**), Dynamic analysis and vibration control of an active tensegrity structure. Cimne

33. Bel Hadj Ali, N., Rhode-Barbarigos, L., Albi, A., Smith, I. (**2010**), Design optimization and dynamic analysis of a tensegrity-based footbridge. Engineering Structures 32:3650–3659. https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2010.08.009

34. Ben Kahla, N., El Ouni, MH., Bel Hadj Ali, N., Khan, R. (**2020**), Nonlinear Dynamic Response and Stability Analysis of a Tensegrity Bridge to Selected Cable Rupture. Latin American Journal of Solids and Structures. https://doi.org/10.1590/1679-78255907

35. Biondini, F., Malerba, P., Quagliaroli, M. (**2011**), Structural Optimization of Cable Systems by Genetic Algorithms

36. Bîrsan, M., Neff, P. (**2014**), Shells without drilling rotations: A representation theorem in the framework of the geometrically nonlinear 6-parameter resultant shell theory. Special issue on Nonlinear and Nonlocal Problems In occasion of 70th birthday of Prof Leonid Zubov 80:32–42. https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2014.02.027

37. Bordoni, B., Marelli, F., Morabito, B., Castagna, R. (**2018**), A New Concept of Biotensegrity Incorporating Liquid Tissues: Blood and Lymph. Journal of Evidence-Based Integrative Medicine 23:2515690X1879283. https://doi.org/10.1177/2515690X18792838

38. Borst, R., Crisfield, M., Remmers, J., Verhoosel, C. (**2012**), Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures: Second Edition. Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures: Second Edition. https://doi.org/10.1002/9781118375938

39. Bui, HQ., Kawabata, M., Van Nguyen, C. (**2022**), A combination of genetic algorithm and dynamic relaxation method for practical form-finding of tensegrity structures. Advances in Structural Engineering 25:2237–2254. https://doi.org/10.1177/13694332221092675

40. Burgardt, B., Cartraud, P. (**1999**), Continuum modeling of beamlike lattice trusses using averaging methods. Computers & Structures 73:267–279. https://doi.org/10.1016/S0045-7949(98)00274-0

41. Burkhardt, RW. (**2008**), A Practical Guide to Tensegrity Design

42. Burzyński, S., Chróścielewski, J., Daszkiewicz, K., Witkowski, W. (**2016a**), Geometrically nonlinear FEM analysis of FGM shells based on neutral physical surface approach in 6-parameter shell theory. Composites Part B: Engineering 107:203–213. https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2016.09.015

43. Burzyński, S., Chróścielewski, J., Witkowski, W. (**2016b**), Geometrically nonlinear FEM analysis of 6-parameter resultant shell theory based on 2-D Cosserat constitutive model. ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik 96:191–204. https://doi.org/10.1002/zamm.201400092

44. Burzyński, S., Chróścielewski, J., Witkowski, W. (**2014**), Elastoplastic material law in 6-parameter nonlinear shell theory. Shell Structures: Theory and Applications - Proceedings of the 10th SSTA 2013 Conference 3:377–380. https://doi.org/10.1201/b15684-94

45. Cai, H., Wang, M., Xu, X., Luo, Y. (**2020**), A General Model for Both Shape Control and Locomotion Control of Tensegrity Systems. W: Frontiers in Built Environment

46. Cai, J., Wang, X., Deng, X., Feng, J. (**2018**), Form-finding method for multi-mode tensegrity structures using extended force density method by grouping elements. Composite Structures 187:1–9. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.12.010

47. Calladine, CR. (**1978**), Buckminster Fuller’s “Tensegrity” structures and Clerk Maxwell’s rules for the construction of stiff frames. International Journal of Solids and Structures 14:161–172. https://doi.org/10.1016/0020-7683(78)90052-5

48. Calladine, CR., Pellegrino, S. (**1991**), First-order infinitesimal mechanisms. International Journal of Solids and Structures 27:505–515. https://doi.org/10.1016/0020-7683(91)90137-5

49. Castro, G., Levy, MP. (**1992**), Analysis of the Georgia Dome Cable Roof. Computing in Civil Engineering and Geographic Information Systems Symposium

50. Chandio, MB., Luo, A., Li, Y., i in. (**2020**), Dynamic Similarity of Six Bar Ball Tensegrity Structure in Compression and Expansion Processes. https://doi.org/10.11916/j.issn.1005-9113.2019032

51. Chen, M., Skelton, RE. (**2020**), A general approach to minimal mass tensegrity. Composite Structures 248:112454

52. Chen, Y., Feng, J. (**2012**), Generalized Eigenvalue Analysis of Symmetric Prestressed Structures Using Group Theory. Journal of Computing in Civil Engineering 26:488–497. https://doi.org/10.1061/(ASCE)CP.1943-5487.0000151

53. Chi Tran, H., Lee, J. (**2010**), Advanced form-finding for cable-strut structures. International Journal of Solids and Structures 47:1785–1794. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2010.03.008

54. Chmielewski, T., Imiełowski, S. (**2020**), Wybrane zagadnienia teorii sprężystości i plastyczności. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej

55. Chróścielewski, J., Kreja, I., Sabik, A., Witkowski, W. (**2011**), Modeling of Composite Shells in 6–Parameter Nonlinear Theory with Drilling Degree of Freedom. Mechanics of Advanced Materials and Structures 18:403–419. https://doi.org/10.1080/15376494.2010.524972

56. Chróścielewski, J., Mąkowski, J., Pietraszkiewicz, W. (**2004**), Statyka i dynamika powłok wielopłatowych : nieliniowa teoria i metoda elementów skończonych

57. Crawford, L. (**2015**), Transgender architectonics: The shape of change in modernist space

58. Cretu, S-M. (**2011**), Innovative design in tensegrity field. Procedia Engineering 9:261–269. https://doi.org/10.1016/j.proeng.2011.03.117

59. Crisfield, MA. (**1991**), Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Essentials. Wiley

60. Daszkiewicz, K., Chróścielewski, J., Witkowski, W. (**2014**), Geometrically nonlinear analysis of functionally graded shells based on 2-D cosserat constitutive model. Engineering Transactions 62:109–130

61. Domer, B., Fest, E., Lalit, V., Smith, IFC. (**2003**), Combining Dynamic Relaxation Method with Artificial Neural Networks to Enhance Simulation of Tensegrity Structures. Journal of Structural Engineering 129:672–681. https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(2003)129:5(672)

62. Domer, B., Smith, IFC. (**2005**), An Active Structure that Learns. Journal of Computing in Civil Engineering 19:16–24. https://doi.org/10.1061/(ASCE)0887-3801(2005)19:1(16)

63. Dong, W., Stafford, PJ., Ruiz-Teran, AM. (**2019**), Inverse form-finding for tensegrity structures. Computers & Structures 215:27–42. https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2019.01.009

64. Dow, JO., Su, ZW., Feng, CC., Bodley, C. (**1985**), Equivalent continuum representation of structures composed of repeated elements. AIAA Journal 23:1564–1569. https://doi.org/10.2514/3.9124

65. Emmerich, DG. (**1964a**), Construction de Reseaux Autotendants

66. Emmerich, DG. (**1964b**), Structures Linéaires Autotendants

67. Estrada, GG., Bungartz, H-J., Mohrdieck, C. (**2006**), Numerical form-finding of tensegrity structures. International Journal of Solids and Structures 43:6855–6868. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2006.02.012

68. Fabbrocino, F., Carpentieri, G. (**2017**), Three-dimensional modeling of the wave dynamics of tensegrity lattices. Composite Structures 173:9–16. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.03.102

69. Falk, A. (**2006**), Architectural and structural development of plate tensegrity

70. Fan, L., Xu, R., Shi, P., i in. (**2023**), Simplified form-finding for tensegrity structures through reference joints of symmetry orbits. Structures 49:1157–1167. https://doi.org/10.1016/j.istruc.2023.02.006

71. Faroughi, S., Lee, J. (**2014a**), Geometrical Nonlinear Analysis of Tensegrity Based on a Co-Rotational Method. Advances in Structural Engineering 17:41–51. https://doi.org/10.1260/1369-4332.17.1.41

72. Faroughi, S., Lee, J. (**2014b**), Design of tensegrity structures by minimizing static compliance. Latin American Journal of Solids and Structures 11:631–648. https://doi.org/10.1590/S1679-78252014000400005

73. Feng, X. (**2018**), Geometrical nonlinear dynamic analysis of tensegrity systems via the corotational formulation. Journal of Mechanics of Materials and Structures 13:263–281. https://doi.org/10.2140/jomms.2018.13.263

74. Fernández-Ruiz, MA., Hernández-Montes, E., Gil-Martín, LM. (**2021**), The Octahedron family as a source of tensegrity families: The X-Octahedron family. International Journal of Solids and Structures 208–209:1–12. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.10.019

75. Fest Etienne, Shea Kristina, Domer Bernd, Smith Ian F. C. (**2003**), Adjustable Tensegrity Structures. Journal of Structural Engineering 129:515–526. https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(2003)129:4(515)

76. Fest Etienne, Shea Kristina, Smith Ian F. C. (**2004**), Active Tensegrity Structure. Journal of Structural Engineering 130:1454–1465. https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(2004)130:10(1454)

77. Fraddosio, A., Marzano, S., Pavone, G., Piccioni, MD. (**2017**), Morphology and self-stress design of V-Expander tensegrity cells. Composite lattices and multiscale innovative materials and structures 115:102–116. https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2016.10.028

78. Fraternali, F., Carpentieri, G., Skelton, R., Micheletti, A. (**2016**), Progettazione parametrica di ponti tensegrity (Parametric design of tensegrity bridges, in Italian). STRUCTURAL, ISSN 2282-3794 201:. https://doi.org/10.12917/Stru201.02

79. Fuller, RB. (**1961**), Tensegrity, with an Introduction by John McHale. Portfolio and Art News Annual 114–148

80. Fuller, RB. (**1962**), Tensile-integrity structures

81. Fuller, RB., Ferkiss, V., Applewhite, EJ. (**1976**), Synergetics: Explorations in the Geometry of Thinking. Technology and Culture 17:104. https://doi.org/10.2307/3103256

82. Fung, YC. (**1969**), Podstawy mechnaiki ciała stałego. PWN, Warszawa

83. Geiger, DH. (**1988**), Roof structure

84. German, J. (**2001**), Podstawy mechaniki kompozytów włóknistych. Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki, Kraków

85. Gilewski, W., Al Sabouni-Zawadzka, A. (**2014**), On possible applications of smart structures controlled by self-stress. Archives of Civil and Mechanical Engineering 15:. https://doi.org/10.1016/j.acme.2014.08.006

86. Gilewski, W., Al Sabouni-Zawadzka, A. (**2020**), Equivalent mechanical properties of tensegrity truss structures with self-stress included. European Journal of Mechanics - A/Solids 83:103998. https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2020.103998

87. Gilewski, W., Al Sabouni-Zawadzka, A., Pelczynski, J. (**2018a**), Physical shape functions in 6-parameter shell theory finite elements

88. Gilewski, W., Kasprzak, A. (**2011**), Tensegrity w konstrukcjach mostowych. 10:35–43

89. Gilewski, W., Kasprzak, A. (**2013**), Tensegrity form-finding via modal analysis

90. Gilewski, W., Kłosowska, J., Obara, P. (**2016**), Verification of Tensegrity Properties of Kono Structure and Blur Building. XXV Polish – Russian – Slovak Seminar “Theoretical Foundation of Civil Engineering" 153:173–179. https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.08.099

91. Gilewski, W., Kłosowska, J., Obara, P. (**2015a**), Applications of Tensegrity Structures in Civil Engineering. Procedia Engineering 111:242–248. https://doi.org/10.1016/j.proeng.2015.07.084

92. Gilewski, W., Kłosowska, J., Obara, P. (**2015b**), Application of singular value decomposition for qualitative analysis of truss and tensegrity structures. Acta Sci PolHortorum Cultus 14:14

93. Gilewski, W., Kłosowska, J., Obara, P. (**2017**), The influence of self-stress on the behavior of tensegrity-like real structure. MATEC Web of Conferences 117:00079. https://doi.org/10.1051/matecconf/201711700079

94. Gilewski, W., Kłosowska, J., Obara, P. (**2019a**), Parametric analysis of some tensegrity structures. MATEC Web Conf 262:. https://doi.org/10.1051/matecconf/201926210003

95. Gilewski, W., Obara, P., Al Sabouni-Zawadzka, A. (**2019b**), 2D Theory of Shell-like Tensegrity Structures. s 271–283

96. Gilewski, W., Obara, P., Kłosowska, J. (**2018b**), Self-stress control of real civil engineering tensegrity structures. AIP Conference Proceedings 1922:150004. https://doi.org/10.1063/1.5019157

97. Gomez-Jauregui, V., Arias, R., Otero, C., Manchado, C. (**2012**), Novel Technique for Obtaining Double-Layer Tensegrity Grids. International Journal of Space Structures 27:155–166. https://doi.org/10.1260/0266-3511.27.2-3.155

98. Gomez-Jauregui, V., Manchado, C., Otero, C. (**2013**), Comparison between new families of Double-Layer Tensegrity Grids

99. Gomez-Jauregui, V., Otero, C., Arias, R., Manchado, C. (**2010**), New configurations for double-layer tensegrity grids

100. Gough, M. (**1998**), In the Laboratory of Constructivism: Karl Ioganson's Cold Structures. October 84:91–117. https://doi.org/10.2307/779210

101. Goyal, R., Majji, M., Skelton, RE. (**2021**), Integrating structure, information architecture and control design: Application to tensegrity systems. Mechanical Systems and Signal Processing 161:107913. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2021.107913

102. Goyal, RK., Hernandez, EAP., Skelton, RE. (**2019**), Analytical study of tensegrity lattices for mass-efficient mechanical energy absorption. International Journal of Space Structures 34:21–3

103. Goyal, RK., Skelton, RE., Hernandez, EAP. (**2020**), Design of minimal mass load-bearing tensegrity lattices. Mechanics Research Communications 103:103477

104. Green, AE. (**1968**), Theoretical elasticity [by] A. E. Green and W. Zerna. Clarendon P, Oxford

105. Guest, S. (**2011**), The Stiffness of Tensegrity Structures. IMA Journal of Applied Mathematics 76:. https://doi.org/10.1093/imamat/hxq065

106. Halfen Detan. (**2020**), SYSTEM CIĘGNOWY DETAN. Katalog Techniczny

107. Hanaor, A. (**1993**), Double-Layer Tensegrity Grids as Deployable Structures. International Journal of Space Structures 8:135–143. https://doi.org/10.1177/0266351193008001-214

108. Hanaor, A. (**2016**), Double-Layer Tensegrity Grids as Deployable Structures: International Journal of Space Structures. https://doi.org/10.1177/0266351193008001-214

109. Hanaor, A. (**1994**), Geometrically rigid double-layer tensegrity grids. International Journal of Space Structures 9:227–238

110. Hanaor, A. (**1988**), Prestressed pin-jointed structures—Flexibility analysis and prestress design. Computers & Structures 28:757–769. https://doi.org/10.1016/0045-7949(88)90416-6

111. Hanaor, A. (**1991**), Double-Layer Tensegrity Grids: Static Load Response. Part II: Experimental Study. Journal of Structural Engineering 117:1675–1684. https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1991)117:6(1675)

112. Hanaor, A. (**1992**), Aspects of Design of Double-Layer Tensegrity Domes. International Journal of Space Structures 7:101–113. https://doi.org/10.1177/026635119200700204

113. Hanaor, A. (**1997**), Tensegrity: Theory and application, Beyond the Cube: The Architecture of Space Frames and Polyhedra. Wiley

114. Jamin, F., Averseng, J., Quirant, J., Vigan-Amouri, S. (**2016**), La mer accessible à tous : Les systèmes de tenségrité déployables au service de l’autonomie

115. Jiang, J-H., Yin, X., Xu, G-K., i in. (**2023**), A unified analytical form-finding of truncated regular octahedral tensegrities. International Journal of Mechanical Sciences 239:107857. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2022.107857

116. Kan, Z., Peng, H., Chen, B., Zhong, W. (**2018**), Nonlinear dynamic and deployment analysis of clustered tensegrity structures using a positional formulation FEM. Composite Structures 187:241–258. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.12.050

117. Kasprzak, A. (**2014**), Ocena możliwości wykorzystania konstrukcji tensegrity w budownictwie mostowym

118. Kawaguchi, K., Lu, ZY. (**2004**), Construction of Three-Strut Tension Systems

119. Kawaguchi, K., Ohya, S. (**2009**), Monitoring of full scale tensegrity skeletons under temperature change

120. Kebiche, K., Aoual, MNK., Motro, R. (**2008**), Continuum Models for Systems in a Selfstress State. International Journal of Space Structures 23:103–115. https://doi.org/10.1260/026635108785260588

121. Kebiche, K., Kazi-Aoual, MN., Motro, R. (**1999**), Geometrical non-linear analysis of tensegrity systems. Engineering Structures 21:864–876. https://doi.org/10.1016/S0141-0296(98)00014-5

122. Kleiber, M. (**1985**), Medoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum. PWN, Warszawa-Poznań

123. Kłosowska, J. (**2018**), Ocena mozliwości wykorzystania konstrukcji tensegrity w budownictwie kubaturowym

124. Kłosowska, J., Obara, P., Gilewski, W., i in. (**2018**), Self-stress control of real civil engineering tensegrity structures. AIP Conference Proceedings 1922:150004. https://doi.org/10.1063/1.5019157

125. Kono, Y., Choong, KK., Shimada, T., Kunieda, H. (**1999**), An experimental investigation of a type of double-layer tensegrity grids. Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures 40:103–111

126. Kono, Y., Kunieda, H. (**1996**), Tensegrity grids transformed from double-layer space grids. Stuttgard, Niemcy, s 293–300

127. Koohestani, K. (**2013**), A computational framework for the form-finding and design of tensegrity structures. Mechanics Research Communications 54:41–49. https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2013.09.010

128. Koohestani, K. (**2020**), Innovative numerical form-finding of tensegrity structures. International Journal of Solids and Structures 206:304–313. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.09.034

129. Koohestani, K. (**2012**), Form-finding of tensegrity structures via genetic algorithm. International Journal of Solids and Structures 49:739–747. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.11.015

130. Koohestani, K., Guest, SD. (**2013**), A new approach to the analytical and numerical form-finding of tensegrity structures. International Journal of Solids and Structures 50:2995–3007. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.05.014

131. Korkmaz, S., Bel Hadj Ali, N., Smith, I. (**2010**), Self-Repair of a Tensegrity Pedestrian Bridge through Grouped Actuation

132. Korkmaz, S., Bel Hadj Ali, N., Smith, I. (**2011**), Determining Control Strategies for Damage Tolerance of an Active Tensegrity Structure. Engineering Structures 33:1930–1939. https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2011.02.031

133. Korkmaz, S., Bel Hadj Ali, N., Smith, I. (**2012**), Configuration of control system for damage tolerance of a tensegrity bridge. Advanced Engineering Informatics 26:145–155. https://doi.org/10.1016/j.aei.2011.09.003

134. Lazopoulos, K., Lazopoulou, N. (**2006**), Stability of a tensegrity structure: Application to cell mechanics. Archive of Applied Mechanics 75:289–301. https://doi.org/10.1007/s00419-005-0442-1

135. Lee, H., Jang, Y., Choe, JK., i in. (**2020**), 3D-printed programmable tensegrity for soft robotics. Science Robotics 5:eaay9024. https://doi.org/10.1126/scirobotics.aay9024

136. Lee, S., Lee, J., Kang, J. (**2017**), A Genetic Algorithm Based Form-finding of Tensegrity Structures with Multiple Self-stress States. Journal of Asian Architecture and Building Engineering 16:155–162. https://doi.org/10.3130/jaabe.16.155

137. Lee, S., Lieu, QX., Vo, TP., Lee, J. (**2022**), Deep Neural Networks for Form-Finding of Tensegrity Structures. Mathematics 10:. https://doi.org/10.3390/math10111822

138. Lee, S., Woo, B-H., Lee, J. (**2013**), Self-stress design of tensegrity grid structures using genetic algorithm. International Journal of Mechanical Sciences 79:. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2013.12.001

139. Lee, SW., Choong, KK. (**2018**), Form-finding of four-stage tensegrity mast. International Journal of Civil Engineering and Technology 9:1425–1434

140. Levy, MP. (**1991**), Floating fabric over Georgia dome. Civil Engineering ASCE 34–37

141. Li, X., He, J., Li, M., i in. (**2020a**), Modal analysis method for tensegrity structures via stiffness transformation from node space to task space. Engineering Structures

142. Li, X., Kong, W., He, J. (**2020b**), A Task-Space Form-Finding Algorithm for Tensegrity Robots. IEEE Access 8:100578–100585. https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.2995541

143. Liapi, KA. (**2002**), Tensegrity unit, structure and method for construction

144. Liapi, KA., Kim, J. (**2003**), A Parametric Approach to the Design of a Tensegrity Vaulted Dome for an Ephemeral Structure for the 2004 Olympics

145. Liapi, KA., Kim, J. (**2004**), Design and Fabrication of Tensegrity Structures a computer based system

146. Liapi, KA., Kim, J. (**2009**), Tensegrity Structures of Helical Shape: A Parametric Approach

147. Linkwitz, K. (**1999**), Formfinding by the “Direct Approach” and Pertinent Strategies for the Conceptual Design of Prestressed and Hanging Structures. International Journal of Space Structures 14:73–87. https://doi.org/10.1260/0266351991494713

148. Liu, F., Wang, L., Jin, D., Wen, H. (**2019**), Equivalent continuum modeling of beam-like truss structures with flexible joints. Acta Mechanica Sinica 35:1067–1078. https://doi.org/10.1007/s10409-019-00872-z

149. Liu, M., Cao, D., Wei, J. (**2022**), Survey on Equivalent Continuum Modeling for Truss Structures and Their Nonlinear Dynamics and Vibration Control. Journal of Vibration Engineering & Technologies 10:667–687. https://doi.org/10.1007/s42417-021-00398-4

150. Ma, S., Chen, M., Peng, Z., i in. (**2022**), The equilibrium and form-finding of general tensegrity systems with rigid bodies. Engineering Structures 266:114618. https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2022.114618

151. Ma, S., Chen, M., Yuan, X., Skelton, RE. (**2021**), Design and analysis of deployable clustered tensegrity cable domes. arXiv:210608424 [cs, eess, math]

152. Malerba, P., Patelli, M., Quagliaroli, M. (**2012**), An Extended Force Density Method for the form finding of cable systems with new forms. Structural engineering & mechanics 42:191–210. https://doi.org/10.12989/sem.2012.42.2.191

153. Małyszko, L., Rutkiewicz, A. (**2019**), Koncepcja wykorzystania modułów tensegrity w konstrukcjach wież stalowych. Inżynieria i Budownictwo R. 75, nr 7–8:

154. Marcinkowski, J. (**1999**), Nieliniowa stateczność powłok sprężystych. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław

155. Martyniuk-Sienkiewicz, K., Gilewski, W. (**2022**), Considerations on Tensegrity Shell-Like Structures Based on 4-strut Simplex Module. W: Akimov P, Vatin N (red) XXX Russian-Polish-Slovak Seminar Theoretical Foundation of Civil Engineering (RSP 2021). Springer International Publishing, Cham, s 308–316

156. Masic, M., Skelton, R. (**2004**), Optimization of class 2 tensegrity towers. Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering 5390:. https://doi.org/10.1117/12.540363

157. Masic, M., Skelton, RE., Gill, PE. (**2005**), Algebraic tensegrity form-finding. International Journal of Solids and Structures 42:4833–4858. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.01.014

158. Maxwell, JC. (**1864**), L. On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science 27:294–299. https://doi.org/10.1080/14786446408643668

159. Melaragno, M. (**1993**), Tensegrities for skeletal domes: the Georgia Dome; a case study. Periodica Polytechnica Architecture 37:73–79

160. Melaragno, MG. (**1991**), An introduction to shell structures : the art and science of vaulting. http://books.google.com/books?id=yr1RAAAAMAAJ

161. Metodieva, IY. (**2014**), Potential applications of tensegrity structures to bridge construction,. Proceedings of Second International Conference on Traffic and Transport Engineering 583–589

162. Micheletti, A. (**2003**), The Indeterminacy Condition for Tensegrity Towers. Revue française de génie civil 7:329–342. https://doi.org/10.3166/rfgc.7.329-342

163. Micheletti, A. (**2012**), Modular Tensegrity Structures: The ”Tor Vergata” Footbridge. s 375–384

164. Motro, R. (**1990**), Tensegrity Systems and Geodesic Domes. International Journal of Space Structures 5:341–351. https://doi.org/10.1177/026635119000500315

165. Motro, R. (**1984**), Forms and Forces in Tensegrity Systems. /paper/Forms-and-Forces-in-Tensegrity-Systems-Motro/79f4624a24113c07829b7a7fa337e59f80048bb7. Accessed 17 wrz 2020

166. Motro, R, ,. (**2003**), Tensegrity : structural systems for the future. http://site.ebrary.com/id/10190918

167. Murakami, H., Nishimura, Y. (**2001**), Static and Dynamic Characterization of Some Tensegrity Modules. Journal of Applied Mechanics 68:19–27. https://doi.org/10.1115/1.1331058

168. Neimitz, A. (**2016**), Elementy mechaniki ośrodków ciągłych i ciała stałego. Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej, Kielce

169. Nemeth, MP. (**2013**), A Treatise on Equivalent-Plate Stiffnesses for Stiffened Laminated-Composite Plates and Plate-Like Lattices

170. Noor, AK. (**1988**), Continuum Modeling for Repetitive Lattice Structures. Applied Mechanics Reviews 41:285–296. https://doi.org/10.1115/1.3151907

171. Noor, AK., Anderson, MS., Greene, WH. (**1978**), Continuum Models for Beam- and Platelike Lattice Structures. AIAA Journal 16:1219–1228. https://doi.org/10.2514/3.61036

172. Noor, AK., Mikulas, Martin, M. (**1988**), Continuum Modeling of Large Lattice Structures: Status and Projections. https://doi.org/10.1007/978-3-642-83376-2_1

173. Noor, AK., Russell, WC. (**1986**), Anisotropic continuum models for beamlike lattice trusses. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 57:257–277. https://doi.org/10.1016/0045-7825(86)90141-6

174. Nowacki, W. (**1970**), Teoria sprężystości. PWN, Warszawa

175. Obara, P. (**2019a**), Dynamika i stateczność dynamiczna struktur tensegrity. Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej, Kielce

176. Obara, P. (**2019b**), Application of linear six-parameter shell theory to the analysis of orthotropic tensegrity plate-like structures. Journal of Theoretical and Applied Mechanics 57:167–178. https://doi.org/10.15632/jtam-pl.57.1.167

177. Obara, P. (**2019c**), Analysis of orthotropic tensegrity plate strips using a continuum two-dimensional model. MATEC Web Conf 262:. https://doi.org/10.1051/matecconf/201926210010

178. Obara, P. (**2019d**), Analysis of orthotropic tensegrity plate strips using a continuum two-dimensional model. MATEC Web of Conferences 262:10010. https://doi.org/10.1051/matecconf/201926210010

179. Obara, P., Solovei, M., Tomasik, J. (**2023**), Qualitative and quantitative analysis of tensegrity domes. Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences 71:e144574–e144574. https://doi.org/10.24425/bpasts.2023.144574

180. Obara, P., Tomasik, J. (**2020**), Parametric Analysis of Tensegrity Plate-Like Structures: Part 1—Qualitative Analysis. Applied Sciences 10:. https://doi.org/10.3390/app10207042

181. Obara, P., Tomasik, J. (**2021a**), Parametric Analysis of Tensegrity Plate-Like Structures: Part 2—Quantitative Analysis. Applied Sciences 11:. https://doi.org/10.3390/app11020602

182. Obara, P., Tomasik, J. (**2021b**), Active Control of Stiffness of Tensegrity Plate-like Structures Built with Simplex Modules. Materials 14:. https://doi.org/10.3390/ma14247888

183. Obara, P., Tomasik, J. (**2023**), Dynamic Stability of Tensegrity Structures—Part I: The Time-Independent External Load. Materials 16:. https://doi.org/10.3390/ma16020580

184. Ohsaki, M., Zhang, JY. (**2015**), Nonlinear programming approach to form-finding and folding analysis of tensegrity structures using fictitious material properties. International Journal of Solids and Structures 69–70:1–10. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2015.06.020

185. Olejnikova, T. (**2012**), Double Layer Tensegrity Grids. Acta Polytechnica Hungarica 9:95–106

186. Olejnikova, T. (**2014**), Geometry of Prismatic Tensegrity Constructions Composed of Three and Four-strut Cells. Selected Scientific Papers - Journal of Civil Engineering 9:47–56. https://doi.org/10.2478/sspjce-2014-0015

187. Oliveto, ND., Sivaselvan, MV. (**2011**), Dynamic analysis of tensegrity structures using a complementarity framework. Computers & Structures 89:2471–2483. https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2011.06.003

188. Pagitz, M., Mirats Tur, JM. (**2009**), Finite element based form-finding algorithm for tensegrity structures. International Journal of Solids and Structures 46:3235–3240. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2009.04.018

189. Papantoniou, A. (**2017**), Parametric models of tensegrity structures with double curvature. ArchiDOCT 5:63–76

190. Paul, C., Lipson, H., Valero-Cuevas, F. (**2005**), Evolutionary form-finding of tensegrity structures

191. Pelczarski, M. (**2013**), About shaping the structure of Katowice Spodek-arena roof. Considerations from interviews with Prof. Wacław Zalewski. ARCHITECTUS; ISSN 1429-7507. https://doi.org/10.5277/ARC130205

192. Pellegrino, S. (**1992**), A Class of Tensegrity Domes. International Journal of Space Structures 7:127–142. https://doi.org/10.1177/026635119200700206

193. Pellegrino, S., Calladine, CR. (**1986**), Matrix analysis of statically and kinematically indeterminate frameworks. International Journal of Solids and Structures 22:409–428. https://doi.org/10.1016/0020-7683(86)90014-4

194. Peng, H., Li, F., Kan, Z. (**2020**), A novel distributed model predictive control method based on a substructuring technique for smart tensegrity structure vibrations. Journal of Sound and Vibration 471:115171

195. Pietraszkiewicz, W. (**2016**), The resultant linear six-field theory of elastic shells: What it brings to the classical linear shell models? ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik 96:899–915. https://doi.org/10.1002/zamm.201500184

196. Pietraszkiewicz, W., Konopińska, V. (**2014**), On refined constitutive equations in the six-field theory of elastic shells. Shell Structures: Theory and Applications - Proceedings of the 10th SSTA 2013 Conference 3:137–140. https://doi.org/10.1201/b15684-32

197. PN-EN 1993-1-1. (**2010**), Eurokod 3: Projektowanie konstrukcji stalowych – Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków

198. PN-EN 1993-1-11. (**2010**), Eurokod 3: Projektowanie konstrukcji stalowych – Część 1-11: Konstrukcje cięgnowe

199. Podhorecki, A. (**2005**), Podstawy teoretyczne metody elementów czasoprzestrzennych. Wydawnictwo Uczelniane Akademii Techniczno-Rolniczej, Bydgoszcz

200. Ponzi, L. (**2002**), Una passerella tensintegra nel campus di Tor Vergata. Praca dyplomowa

201. Pugh, A. (**1976**), An introduction to tensegrity / by Anthony Pugh. University of California Press, Berkeley

202. Radoń, U. (**2012**), Zastosowanie metody FORM w analizie niezawodności konstrukcji kratowych podatnych na przeskok. Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej, Kielce

203. Raducano, V. (**2001**), Architecture et système constructif: Cas des systèmes de tenségrité. Praca doktorska, Université Montpellier II

204. Railing, P., Gough, M. (**2007**), The Artist as Producer: Russian Constructivism in Revolution. Slavic Review 66:367. https://doi.org/10.2307/20060273

205. Rakowski, G. (**1996**), Metoda elementów skończonych – wybrane problemy. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa

206. Rakowski, G., Kasprzyk, Z. (**2005**), Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa

207. Rastorfer, D. (**1988**), Structural Gymnastics for the Olympics. Architectural Record

208. Rhode-Barbarigos, L., Bel Hadj Ali, N., Motro, R., Smith, IFC. (**2012a**), Design Aspects of a Deployable Tensegrity-Hollow-rope Footbridge. International Journal of Space Structures 27:81–95. https://doi.org/10.1260/0266-3511.27.2-3.81

209. Rhode-Barbarigos, L., Bel Hadj Ali, N., Motro, R., Smith, IFC. (**2010a**), Designing tensegrity modules for pedestrian bridges. Engineering Structures 32:1158–1167. https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2009.12.042

210. Rhode-Barbarigos, L., Bel Hadj Ali, N., Motro, R., Smith, IFC. (**2010b**), Designing tensegrity modules for pedestrian bridges. Engineering Structures 32:1158–1167. https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2009.12.042

211. Rhode-Barbarigos, L., Bel Hadj Ali, N., Motro, R., Smith, IFC. (**2009**), Tensegrity modules for pedestrian bridges. Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS) Symposium 2009, Valencia

212. Rhode-Barbarigos, L., Motro, R., Smith, IFC. (**2012b**), A transformable tensegrity-ring footbridge

213. Rieffel, J., Stuk, R., Valero-Cuevas, F., Lipson, H. (**2023**), Locomotion of a Tensegrity Robot via Dynamically Coupled Modules

214. Safaei, SD., Eriksson, A., Micheletti, A., Tibert, G. (**2013**), Study of Various Tensegrity Modules as Building Blocks for Slender Booms. International Journal of Space Structures 28:41–52. https://doi.org/10.1260/0266-3511.28.1.41

215. Schek, H-J. (**1974**), The force density method for form finding and computation of general networks. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 3:115–134. https://doi.org/10.1016/0045-7825(74)90045-0

216. Schlaich, M. (**2004**), The messeturm in rostock - A tensegrity tower. 45:93–98

217. Schorr, P., Li, E., Kaufhold, T., i in. (**2020**), Kinematic analysis of a rolling tensegrity structure with spatially curved members. Meccanica 56:. https://doi.org/10.1007/s11012-020-01199-x

218. Shekastehband, B., Abedi, K., Dianat, N., Chenaghlou, MR. (**2012**), Experimental and numerical studies on the collapse behavior of tensegrity

systems considering cable rupture and strut collapse with snap-through. International Journal of Non-Linear Mechanics 47:751–768. https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2012.04.004

219. Shuo, M., Chen, M., Skelton, R. (**2020**), Design of a new tensegrity cantilever structure. Composite Structures 243:112188. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112188

220. Skelton, R., Fraternali, F., Carpentieri, G., Micheletti, A. (**2013**), Minimum mass design of tensegrity bridges with parametric architecture and multiscale complexity. Mechanics Research Communications 58:. https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2013.10.017

221. Skelton, R., Oliveira, M. (**2009**), Tensegrity Systems

222. Skelton, RE., Oliveira, MC de. (**2010**), Optimal complexity of deployable compressive structures. Journal of the Franklin Institute 1:228–256. https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2009.10.010

223. Smaili, A., Motro, R. (**2007**), Foldable/unfoldable curved tensegrity systems by finite mechanism activation. Journal- International Association for Shell and Spatial Structures 48:153–160

224. Smith, IFC. (**2009**), Control enhancements of a biomimetic structure. Electronic Journal of Information Technology in Construction 14:229–237

225. Snelson, K. (**1965**), Continuous tension, discontinuous compression structure

226. Snelson, K. (**2013**), Art and ideas, Kenneth Snelson in association with Marlborough Gallery. N.Y.

227. Snelson, K. (**2002**), Space frame structure made by 3-D weaving of rod members

228. Song, K., Scarpa, F., Schenk, M. (**2022**), Form-finding of tessellated tensegrity structures. Engineering Structures 252:113627. https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.113627

229. Sulaiman, S., Narayanaswamy, P., Geetha, B., Satyanarayanan, K s. (**2016**), The Performance of Half-Cuboctahedron Grid Tensegrity Systems in Roof Structures. Indian Journal of Science and Technology 9:. https://doi.org/10.17485/ijst/2016/v9i32/98636

230. Sultan, C., Skelton, R. (**2003**), Deployment of tensegrity structures. International Journal of Solids and Structures 40:4637–4657. https://doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00267-1

231. Sultan, C., Skelton, R. (**2002**), Linear dynamics of tensegrity structures. Engineering Structures - ENG STRUCT 24:671–685. https://doi.org/10.1016/S0141-0296(01)00130-4

232. Sun, Z., Heng, T., Zhao, L., i in. (**2023**), A novel form-finding method via noise-tolerant neurodynamic model for symmetric tensegrity structure. Neural

Computing and Applications 35:6813–6830. https://doi.org/10.1007/s00521-022-08039-x

233. Sun, Z., Zhao, L., Liu, K., i in. (**2022**), An advanced form-finding of tensegrity structures aided with noise-tolerant zeroing neural network. Neural Computing and Applications 34:6053–6066. https://doi.org/10.1007/s00521-021-06745-6

234. Szmelter, J. (**1980**), Metody naukowe w mechanice. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa

235. Szymkiewicz, R. (**2010**), Numerical modeling in open channel hydraulics

236. Tarnai, T., Gaspar, Z. (**1983**), Improved packing of equal circles on a sphere and rigidity of its graph. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 93:191–218. https://doi.org/10.1017/S0305004100060485

237. Terry, WR. (**1994**), Georgia Dome cable roof construction techniques.

238. Teughels, A., De Roeck, G. (**2000**), Continuum models for beam- and platelike lattice structures. W: IASS-IACM 2000, 4th International Colloquium on Computation of Shell and Spatial Structures

239. Tibert, G. (**2002**), Deployable Tensegrity Structures for Space Applications. 244

240. Timoshenko, S., Goodier, JN. (**1962**), Teoria sprężystości. Arkady, Warszawa

241. Tkachuk, A. (**2022**), Robustness of rank minimization heuristics for form-finding of tensegrity structures. Computers & Structures 266:106786. https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2022.106786

242. Tomasik, J., Obara, P. (**2021**), Impact of the self-stress state on the static properties of double-layered tensegrity grids. W: Modern Trends in Research on Steel, Aluminium and Composite Structures: Proceedings of the XIV International Conference On Metal Structures (ICMS2021), Poznań, Poland, 16-18 Jun. 2021, 1st ed. Routledge

243. Tran, HC., Lee, J. (**2010**), Initial self-stress design of tensegrity grid structures. Computers & Structures 88:558–566. https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2010.01.011

244. Tran, HC., Lee, JKP. (**2011**), Geometric and material nonlinear analysis of tensegrity structures. Acta Mechanica Sinica 27:938–949

245. Vangelatos, Z., Farina, I., Micheletti, A., i in. (**2020a**), On the fabrication and mechanical modelling microscale bistable tensegrity systems. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering 999:012002. https://doi.org/10.1088/1757-899x/999/1/012002

246. Vangelatos, Z., Micheletti, A., Grigoropoulos, CP., Fraternali, F. (**2020b**), Design and Testing of Bistable Lattices with Tensegrity Architecture and Nanoscale Features Fabricated by Multiphoton Lithography. Nanomaterials 10:. https://doi.org/10.3390/nano10040652

247. Verma, P., Smith, CL., Griffin, AC., Shofner, ML. (**2022**), Towards textile metamaterials: a pathway to auxeticity and tensegrity in a needle-punched nonwoven stiff felt. Materials Advances 3:6324–6334. https://doi.org/10.1039/D2MA00405D

248. Vesna, V. (**2000**), Networked Public Spaces: An Investigation Into Virtual Embodiment. University of Wales College, Newport

249. Wang, B-B. (**2004**), Free-Standing Tension Structures: From Tensegrity Systems to Cable-Strut Systems. CRC Press

250. Wang, B-B. (**1998**), Cable-strut systems: part I — tensegrity. Journal of Constructional Steel Research 45:281–289. https://doi.org/10.1016/S0143-974X(97)00075-8

251. Wang, B-B. (**2012**), Realizing Cable-Strut Systems. 6

252. Wang, Y., Liu, X., Zhu, R., Hu, G. (**2018**), Wave propagation in tunable lightweight tensegrity metastructure. Scientific Reports 8:. https://doi.org/10.1038/s41598-018-29816-6

253. Wang, Y., Xian, X., Luo, Y. (**2020**), Topology-Finding of Tensegrity Structures Considering Global Stability Condition. Journal of Structural Engineering 146:. https://doi.org/10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0002843

254. Wang, Y., Xian, X., Luo, Y. (**2021a**), Form-finding of tensegrity structures via rank minimization of force density matrix. Engineering Structures 227:111419. https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2020.111419

255. Wang, Y., Xian, X., Luo, Y. (**2021b**), A unifying framework for form-finding and topology-finding of tensegrity structures. Computers & Structures 247:106486. https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2021.106486

256. Wang, Y., Xu, X. (**2019**), Prestress Design of Tensegrity Structures Using Semidefinite Programming. Advances in Civil Engineering 2019:1–9. https://doi.org/10.1155/2019/5081463

257. Wang, Y., Xu, X., Luo, Y. (**2021c**), Minimal mass design of active tensegrity structures. Engineering Structures 234:111965. https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.111965

258. Wawszczyn, Z., Cichoń, Cz. (**1995**), Mechnika budowli. Ujęcie komputerowe. Arkady, Warszawa

259. Wawszczyn, Z., Cichoń, Cz., Radwańska, M. (**1990**), Metoda elementów skonczonych w stateczności konstrukcji. Arkady, Warszawa

260. Wen, L., Pan, F., Ding, X. (**2020**), Tensegrity metamaterials for soft robotics. Science Robotics 5:eabd9158. https://doi.org/10.1126/scirobotics.abd9158

261. Witkowski, W. (**2011**), Synthesis of Formul ation of Nonlinear Mechanics of Shells Undergoing Finite Rotations in The Context of FEM. Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk

262. Wolkowicz, C., Jürgen, R., Stahr, A. (**2007**), Cable-Strut Systems: Geometry and Sensitivity

263. Woźniak, A. (**2013**), Analiza nośności kładki dla pieszych o konstrukcji typu tensegrity. Praca inżynierska, Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie

264. Xian, X., Luo, Y. (**2010**), Multi-Stable Tensegrity Structures. Journal of Structural Engineering-asce - J STRUCT ENG-ASCE 137:. https://doi.org/10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0000281

265. Xu, X., Wang, Y., Luo, Y. (**2018**), Finding member connectivities and nodal positions of tensegrity structures based on force density method and mixed integer nonlinear programming. Engineering Structures 166:240–250. https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.03.063

266. Yildiz, K., Lesieutre, GA. (**2019**), Effective Beam Stiffness Properties of n-Strut Cylindrical Tensegrity Towers. AIAA Journal 57:2185–2194. https://doi.org/10.2514/1.J057774

267. Yin, X., Gao, Z-Y., Zhang, S., i in. (**2020a**), Truncated regular octahedral tensegrity-based mechanical metamaterial with tunable and programmable Poisson’s ratio. International Journal of Mechanical Sciences 167:105285

268. Yin, X., Zhang, S., Xu, G-K., i in. (**2020b**), Bandgap characteristics of a tensegrity metamaterial chain with defects. Extreme Mechanics Letters 36:100668

269. Zalewski, W., Allen, E. (**1998**), Shaping structures : statics. Wiley, New York

270. Zawadzki, A., Gilewski, W., Al Sabouni-Zawadzka, A. (**2014**), Rozwijalne inteligentne kładki dla pieszych typu tensegrity - analiza konstrukcji i aspekty technologiczne. W: Współczesne Technologie Budowy Mostów. Politechnika Wrocławska, Wrocław, s 335–342

271. Zhang, A., Sun, C., Ziqin, J. (**2018a**), Experimental study on the construction shape-forming process and static behaviour of a double strut cable dome. Journal of Zhejiang University: Science A 19:225–239. https://doi.org/10.1631/jzus.A1700071

272. Zhang, L-Y., Li, Y., Cao, Y-P., Feng, X-Q. (**2014**), Stiffness matrix based form-finding method of tensegrity structures. Engineering Structures 58:36–48. https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2013.10.014

273. Zhang, P., Feng, J. (**2016**), Initial prestress design and optimization of tensegrity systems based on symmetry and stiffness. International Journal of Solids and Structures 106:. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.11.030

274. Zhang, P., Zhou, J., Chen, J. (**2021a**), Form-finding of complex tensegrity structures using constrained optimization method. Composite Structures 268:113971. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.113971

275. Zhang, P., Zhou, J., Chen, J. (**2021b**), Form-finding of complex tensegrity structures using constrained optimization method. Composite Structures 268:113971. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.113971

276. Zhang, Q., Wang, X., Cai, J., i in. (**2020**), Closed-Form Solutions for the Form-Finding of Regular Tensegrity Structures by Group Elements. Symmetry 12:374. https://doi.org/10.3390/sym12030374

277. Zhang, Q., Zhang, D., Dobah, Y., i in. (**2018b**), Tensegrity cell mechanical metamaterial with metal rubber. Applied Physics Letters 113:031906. https://doi.org/10.1063/1.5040850

278. Zhang, ZH., Shu, XP., He, M. (**2015**), Equivalent solid-web beam method for steel truss based on the energy principle. 477–480. https://doi.org/10.1201/b17568-97

279. Zhao, L., Liu, K., Li, C., i in. (**2021**), Form-finding of Tensegrity Structures Utilizing a Nonlinear Fletcher-Reeves Conjugate Gradient Method. W: 2021 IEEE International Conference on Real-time Computing and Robotics (RCAR). s 732–737

280. Zhao, L., Sun, Z., Liu, K., Zhang, J. (**2023**), The dynamic relaxation form finding method aided with advanced recurrent neural network. CAAI Transactions on Intelligence Technology n/a: https://doi.org/10.1049/cit2.12177

281. Zienkiewicz, OC., Taylor, RL., Zhu, JZ. (**2013**), The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. Butterworth-Heinemann, Oxford

STRESZCZENIE

Przedmiotem rozważań pracy doktorskiej jest analiza parametryczna dwuwarstwowych kratownic typu tensegrity. Kompletna analiza tych struktur jest procesem dwuetapowym. Pierwszy etap to ocena jakościowa, która obejmuje identyfikację cech charakterystycznych struktur tensegrity i klasyfikację do jednej z czterech grup. Drugi etap to analiza ilościowa, która koncentruje się na badaniu zachowania konstrukcji pod wpływem obciążeń zewnętrznych. Oceny ilościowej dwuwarstwowych kratownic typu tensegrity dokonać można stosując podejście dyskretne lub, ze względu na powtarzalny charakter tego rodzaju konstrukcji, podejście kontynualne. W ujęciu dyskretnym struktura jest analizowana metodą elementów skończonych, natomiast w modelu kontynualnym z wykorzystaniem sześcioparametrowej teorii powłok.

W pracy rozpatrzono szerokie spektrum konstrukcji w ujęciu dyskretnym. Rozważone przykłady stanowią bazę do kolejnego etapu rozważań, czyli ujęcia kontynualnego. Do opisu zachowania struktur tensegrity przyjęty został model quasi-liniowy i geometrycznie nieliniowy, w którym uwzględniono duże gradienty przemieszczeń, ale małe gradienty odkształceń. Przeprowadzono statyczną analizę parametryczną, ze szczególnym uwzględnieniem wpływu wstępnego sprężenia na przemieszczenia, nośność i sztywność konstrukcji. Udowodniono, że w przypadku konstrukcji charakteryzujących się występowaniem mechanizmu infinitezymalnego sztywność zależy nie tylko od geometrii i właściwości materiałowych, ale również od poziomu stanu samonaprężenia i od obciążenia zewnętrznego. W przypadku takich konstrukcji możliwe jest sterowanie parametrami statycznymi. W literaturze mianem *tensegrity* nazywane są również konstrukcje, w których nie występuje mechanizm (w pracy takie konstrukcje nazwano s*trukturami o cechach tensegrity klasy 2*) – struktury te są niewrażliwe na poziom stanu samonaprężenia.

Do opracowania modelu kontynualnego przyjęto procedurę zwaną metodą równoważnej energii. Podstawą tego podejścia jest założenie, że energia odkształcenia elementów skończonych zdeformowanej kratownicy tensegrity zawiera taką samą energię jak analogiczny model kontynualny tejże kratownicy. Za pomocą procedury przedstawionej w pracy wyznaczono ekwiwalentną macierz sprężystości. Kolejnym

krokiem była walidacja otrzymanego modelu kontynualnego. W znanej autorce literaturze brak jest oceny słuszności stosowania ujęcia kontynualnego do modelowania płytowych i belkowych konstrukcji tensegrity charakteryzujących się istnieniem mechanizmu. W istniejących publikacjach sprawdzane są tylko współczynniki ekwiwalentnej macierzy sprężystości. Niniejsza praca rozwija istniejące badania i sprawdza celowość stosowania podejścia kontynualnego. Otrzymane wyniki walidacji modelu kontynualnego dają zadowalającą dokładność, ale proponowane podejście wymaga jeszcze uszczegółowienia poprzez uwzględnienie anizotropii rozpatrywanych struktur, nieliniowości pracy konstrukcji, walidację współczynników ścinania oraz dostosowanie funkcji aproksymującej przemieszczenia. Autorka planuje kontynuować prace nad modelem kontynualnym struktur tensegrity w kolejnych etapach pracy naukowej.

Na potrzeby przeprowadzonych rozważań oba zastosowane w pracy podejścia obliczeniowe, tj. model dyskretny i kontynualny, zostały zaimplementowane w środowisku *Mathematica*. W celu rozważenia struktur w ujęciu dyskretnym z uwzględnieniem teorii III rzędu, rozwiązać należało nieliniowy układ równań. W pracy zastosowano w tym celu metodę Newtona-Raphsona. W celu zastosowania modelowania kontynualnego, napisany został kolejny program, za pomocą którego, dla konstrukcji o wybranych parametrach geometrycznych i materiałowych, wyprowadzane są współczynniki ekwiwalentnej macierzy sprężystości.

SUMMARY

The subject of this PhD thesis is the parametric analysis of double-layered tensegrity grids. A complete analysis of tensegrity structures is a two-step process. The first stage is the qualitative analysis, which includes the identification of the tensegrity features structures and the classification of the structures into one of four groups. The second stage is the quantitative analysis, which focuses on the behaviour of structures under the influence of external loads. The quantitative assessment of double-layered tensegrity grids can by discrete modelling or, due to the repetitive nature of this type of structures, by continuum modelling. In the discrete approach, the structure is analysed using the finite element method, while in the continuum model, the six-parameter shell theory is used.

In the work, a wide spectrum of structures is considered using a discrete modelling. The presented examples are the basis for the next stage of considerations, i.e. the continuum approach. To describe the behaviour of tensegrity structures, a quasi-linear and geometrically non-linear model was adopted, in which large gradients of displacements and small gradients of strains were considered. The static parametric analysis was carried out, with particular emphasis on the influence of the self-stress state on displacements, load-bearing capacity and stiffness of the structure. It was proved that in the case of structures characterized by the occurrence of the infinitesimal mechanisms, the stiffness depends not only on the geometry and material properties, but also on the level of self-stress and the external load. In the case of such structures, it is possible to control the static parameters. In the literature, tensegrity is also used to refer to structures in which there is no mechanism (in this work, such structures are called *structures with tensegrity features of class 2*) – these structures are insensitive to the change of the level of self-stress.

A procedure called the energy equivalence method was adopted to develop the continuum model. The basis of this approach is the assumption that the finite element strain energy of a deformed tensegrity truss system contains the same energy as its continuum counterpart. Using the procedure presented in the work, the equivalent matrix of elasticity was determined. The next step was to validate the obtained continuum model. In the literature known to the author, there is no validation of the

continuum model of tensegrity beam-like and plate-like structures. In previous studies, only the stiffness matrix coefficients of the continuum model were verified. Therefore, this paper develops the existing research and checks the applicability of the continuum approach. The obtained results gave satisfying accuracy; however, the proposed approach still needs to be refined by considering the anisotropy of the considered structures, non-linearity of the behaviour of structures, validation of the shear coefficients and adjustment of the assumed deflection function. The author intends to continue the work on the continuum model of tensegrity structures in the next stages of her scientific career.

For the purpose of the considerations, both approaches used in the work, i.e. discrete and continuum modelling, were implemented in the *Mathematica* environment. In order to consider the structures in the discrete approach, taking into account the nonlinearity (third order theory), a non-linear system of equations had to be solved. The Newton-Raphson method was implemented. To utilize continuum modelling, another program was written, by means of which the coefficients of the equivalent matrix of elasticity were derived for structures with given geometrical and material parameters.

ANALIZA PARAMETRYCZNA DWUWARSTWOWYCH KRATOWNIC TYPU TENSEGRITY – MODEL DYSKRETNY I KONTYNUALNY

ZAŁĄCZNIK – PROCEDURY OBLICZENIOWE

mgr inż. Justyna Tomasik

Kielce, 2023

PROCEDURY OBLICZENIOWE

W poniższym załączniku zawarto procedury obliczeniowe napisane w środowisku *Mathematica.* Na potrzeby rozprawy, przygotowane zostały następujące programy:

1. *analiza spektralna.nb*

   W powyższym pliku w pierwszej kolejności generowana jest geometria konstrukcji. Użytkownik wprowadza współrzędne węzłów, numery początkowych i końcowych węzłów elementów, odebrane stopnie swobody oraz charakterystyki geometryczne i materiałowe prętów. Na podstawie podanych informacji program automatycznie generuje wektor wydłużeń $\mathbf{B}$, macierz sztywności liniowej $\mathbf{K}_L$ i macierz sztywności geometrycznej $\mathbf{K}_G$ dla rozpatrywanej konstrukcji. W kolejnym kroku program przeprowadza analizę spektralną macierzy kratownic i identyfikuje istniejące stany samonaprężenia oraz mechanizmy. W programie można także wygenerować rysunki geometrii konstrukcji zawarte w pracy. Dodatkowo, w celu sprawdzenia poprawności przyjętego stanu samonaprężenia (w zawartym przykładzie musiał być to stan pochodzący z superpozycji stanu samonaprężenia pojedynczego elementu), zaimplementowano funkcję sprawdzającą równowagę węzłów. Procedura generuje plik tekstowy zawierający dane o geometrii konstrukcji, które zostaną użyte w kolejnej procedurze.

2. *teoria II i III rzędu, dynamika.nb*

   W tym pliku zaimplementowana została metoda Newtona-Raphsona. Dane dotyczące geometrii konstrukcji program pobiera z pliku tekstowego generowanego przez program *analiza spektralna.nb*. Użytkownik podaje poziomy stanu samonaprężenia oraz obciążenie konstrukcji. Obciążenie może być przykładane do rozpatrywanej konstrukcji stopniowo, z krokiem zadanym przez użytkownika. Po przeprowadzeniu obliczeń program automatycznie generuje notkę obliczeniową w formacie *.xlsx,* zawierającą ekstremalne wartości przemieszczeń, przemieszczenia wybranego węzła, współczynnik GPS i maksymalne wytężenie konstrukcji. W rozprawie zastosowane jedynie cześć programu, dotyczącą statyki konstrukcji, natomiast pełna procedura stworzona przez autorkę umożliwia także analizę dynamiczną, tj. wyznaczenie częstotliwości drgań swobodnych i wymuszonych oraz wyznaczenie map Ince'a-Strutta obszarów niestatecznych w funkcji stanu samonaprężenia. Autorka planuje wykorzystać program w trakcie dalszej pracy naukowej.

3. *model kontynualny.nb*

   W celu zastosowania modelowania kontynualnego, napisany został kolejny program, który dla konstrukcji o wybranych parametrach geometrycznych i materiałowych (wczytywanych do programu także za pomocą zewnętrznego pliku tekstowego), przeprowadza cztery transformacje macierzowe, opisane w rozdziale 4.4. Po wyznaczeniu współczynników równoważnej macierzy sztywności, użytkownik zadaje wymiary rozpatrywanej struktury, wielkość obciążenia oraz współczynniki ścinania w celu wyznaczenia przez program maksymalnego ugięcia dla płyty ortotropowej swobodnie podpartej na czterech krawędziach (w załączonym przykładzie i pasma ortotropowego swobodnie podpartego.

4. *ugięcie płyta.nb*

   Aby wyprowadzić jawną postać wzoru na maksymalne ugięcie płyty ortotropowej swobodnie podpartej na czterech krawędziach, napisano procedurę rozwiązującą układ równań różniczkowych (4.54). Użytkownik może wprowadzić dowolną funkcję kształtu i obciążenia, składającą się z wybranej przez siebie liczby członów szeregu Fouriera.

5. *ugięcie pasmo.nb*

   Analogicznie jak w poprzednim punkcie, aby wyprowadzić jawną postać wzoru na maksymalne ugięcie pasma ortotropowego swobodnie podpartego, napisano procedurę rozwiązującą układ równań różniczkowych (4.71).

In[1]:=
```
dane;

numery pierwszych (p1) i drugich (p2) węzłów elementu;
p1 = {13, 15, 10, 7, 9, 10, 7, 9, 4, 1, 3, 4, 13, 15, 18, 19,
   21, 18, 4, 5, 6, 11, 16, 17, 12, 10, 18, 1, 2, 3, 7, 8, 9, 15, 13, 19, 20,
   21, 14, 4, 5, 11, 12, 6, 17, 18, 16, 10, 11, 6, 4, 5, 12, 10, 17, 18, 16};
p2 = {12, 11, 14, 12, 11, 8, 6, 5, 8, 6, 5, 2, 17, 16, 14, 17, 16, 20, 5,
   6, 4, 12, 17, 18, 10, 11, 16, 2, 3, 1, 8, 9, 7, 13, 14, 20, 21, 19,
   15, 7, 8, 14, 15, 9, 15, 13, 14, 13, 8, 3, 1, 2, 9, 7, 21, 19, 20};
le = Length[p1];
współrzedne węzłów;
aa = 1;
h = 1;
x = {-0.5, 0.5, 0, -0.3333, 0.1667, 0.1667, -0.5, 0.5, 0, -0.3333,
   0.1667, 0.1667, -0.5, 0.5, 0, 0.1667, 0.1667, -0.3333, -0.5, 0.5, 0} * aa
y = {0.2887, 0.2887, -0.5774, 0, 0.2887, -0.2887, 0.2887, 0.2887, -0.5774, 0, 0.2887,
   -0.2887, 0.2887, 0.2887, -0.5774, 0.2887, -0.2887, 0, 0.2887, 0.2887, -0.5774} * aa
z = {0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6} * h
lw = Length[x];
```

```
{-0.5, 0.5, 0, -0.3333, 0.1667, 0.1667, -0.5, 0.5, 0, -0.3333,
 0.1667, 0.1667, -0.5, 0.5, 0, 0.1667, 0.1667, -0.3333, -0.5, 0.5, 0}
```

Out[10]=
```
{0.2887, 0.2887, -0.5774, 0, 0.2887, -0.2887, 0.2887, 0.2887, -0.5774, 0, 0.2887,
 -0.2887, 0.2887, 0.2887, -0.5774, 0.2887, -0.2887, 0, 0.2887, 0.2887, -0.5774}
```

Out[11]=
```
{0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6}
```

In[13]:=
```
odebrane stopnie swobody;
loss1 = {1, 2, 3};
loss2 = {}
toss = Join[Union[loss1 * 3 - 2, loss1 * 3 - 1, 3 * loss1, loss2 * 3 - 2, loss2 * 3 - 1]];
loss = Length[toss];

charakterystyki elementów;
e = Table[210000000, {le}];
a = Table[0, {le}];
ac = 3.14159 * 10^(-4);
az = 6.88 * 10^(-4);
cięgna;
Do[
  (
   a[[i]] = ac;
  ),
  {i, 13, le}
 ];
zastrzały;
Do[
  (
   a[[i]] = az;
  ),
  {i, 1, 12}
 ];
stopnie swobody;
llss = 6;
```

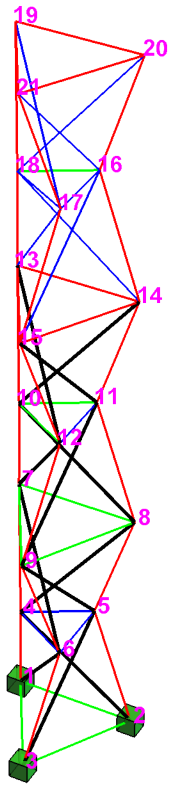
```
lgss = 3 * lw;
tablica wszystkich stopni swobody;
tss = Table[i, {i, lgss}];
niezerowe stopnie swobody;
lnss = lgss - loss;
tnss = Table[0, {lnss}];
inicjowanie tablicy niezerowych stopni swobody;
ii = 1;
Do[
  (
   c = 1;
   Do[
    (
     If[tss[[i]] == toss[[j]], (j = loss; c = 0)]
    ),
    {j, loss}
   ];
   If[c == 1, (tnss[[ii]] = tss[[i]]; ii++)]
  ),
  {i, lgss}
 ];

obliczenia macierzy sztywnościli linowej i macierzy wydłużeń;
B = Table[0, {le}, {lgss}];
Bt = Table[0, {lgss}, {le}];
n = Table[0, {llss}];
Do[
  (
   w1 = p1[[i]];
   w2 = p2[[i]];
   x1 = x[[w1]];
   y1 = y[[w1]];
   z1 = z[[w1]];
   x2 = x[[w2]];
   y2 = y[[w2]];
   z2 = z[[w2]];
   L = Sqrt[(x2 - x1) * (x2 - x1) + (y2 - y1) * (y2 - y1) + (z2 - z1) * (z2 - z1)];
   cx = (x2 - x1) / L;
   cy = (y2 - y1) / L;
   cz = (z2 - z1) / L;
   n[[3]] = 3 * w1;
   n[[2]] = n[[3]] - 1;
   n[[1]] = n[[3]] - 2;
   n[[6]] = 3 * w2;
   n[[5]] = n[[6]] - 1;
   n[[4]] = n[[6]] - 2;
   macierz odkształceń;
   B[[i, n[[1]]]] = -cx;
   B[[i, n[[2]]]] = -cy;
   B[[i, n[[3]]]] = -cz;
   B[[i, n[[4]]]] = cx;
   B[[i, n[[5]]]] = cy;
   B[[i, n[[6]]]] = cz;
   transponowana macierz odkształceń pomnożona przez sztywność;
```

```
    sz = e[[i]] * a[[i]] / L;
    Bt[[n[[1]], i]] = -cx * sz;
    Bt[[n[[2]], i]] = -cy * sz;
    Bt[[n[[3]], i]] = -cz * sz;
    Bt[[n[[4]], i]] = cx * sz;
    Bt[[n[[5]], i]] = cy * sz;
    Bt[[n[[6]], i]] = cz * sz;
   ),
   {i, le}
  ];
MatrixForm[B];
macierz sztywności liniowej;
k = Bt.B;
MatrixForm[k];
d = B.Bt;
MatrixForm[d];
```

Out[15]= { }

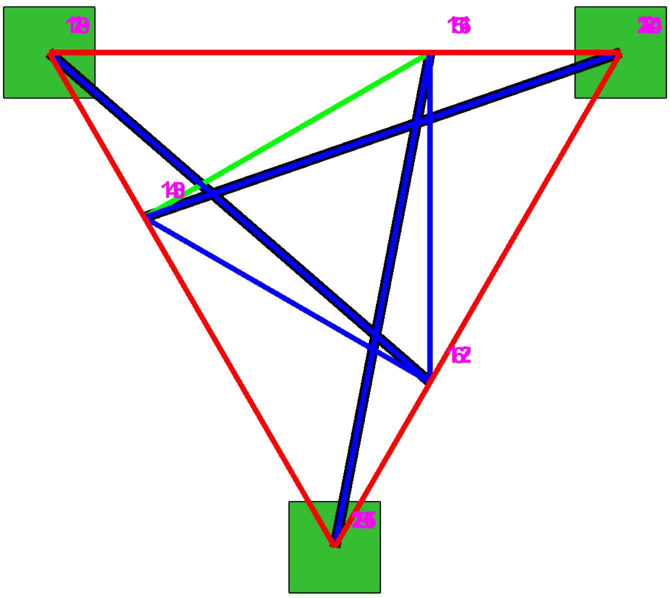
In[49]:=
```
rysunek;
d = 0.05;
zastrzaly =
   {Thickness[0.016], Table[Line[{{x[[p1[[i]]]], y[[p1[[i]]]], z[[p1[[i]]]]},
       {x[[p2[[i]]]], y[[p2[[i]]]], z[[p2[[i]]]]}}], {i, 1, 12}]};
ciegna1 = {Thickness[0.008], Table[Line[{{x[[p1[[i]]]], y[[p1[[i]]]], z[[p1[[i]]]]},
       {x[[p2[[i]]]], y[[p2[[i]]]], z[[p2[[i]]]]}}], {i, 34, le}]};
ciegna2 = {Thickness[0.008], Table[Line[{{x[[p1[[i]]]], y[[p1[[i]]]], z[[p1[[i]]]]},
       {x[[p2[[i]]]], y[[p2[[i]]]], z[[p2[[i]]]]}}], {i, 25, 33}]};
ciegna3 = {Thickness[0.008], Table[Line[{{x[[p1[[i]]]], y[[p1[[i]]]], z[[p1[[i]]]]},
       {x[[p2[[i]]]], y[[p2[[i]]]], z[[p2[[i]]]]}}], {i, 13, 24}]};
węzły = {Thickness[0.02], Table[ Text[Style[i, {FontSize → 12, Bold}],
      {x[[i]] + d, y[[i]] + d, z[[i]] + d}], {i, 1, lw}]};
d = 0.08;
kule = Table [Cuboid[{x[[p]] - d, y[[p]] - d, z[[p]] - d},
     {x[[p]] + d, y[[p]] + d, z[[p]] + d}], {p, loss1}];
numeracja elementów;
xc = Table[0, {le}];
yc = Table[0, {le}];
zc = Table[0, {le}];
Do[
   xc[[i]] = (x[[p1[[i]]]] + x[[p2[[i]]]]) / 2;
   yc[[i]] = (y[[p1[[i]]]] + y[[p2[[i]]]]) / 2;
   zc[[i]] = (z[[p1[[i]]]] + z[[p2[[i]]]]) / 2,
   {i, le}
  ];
elementy = {Thick, Table[
     Text[Style[i, {FontSize → 12, Bold}], {xc[[i]], yc[[i]], zc[[i]]}], {i, 1, le}]};
Graphics3D[{zastrzaly, Red, ciegna1, Green, ciegna2, Blue, ciegna3,
   Magenta, węzły, RGBColor[0.2, 0.9, 0.2, 0.8], kule}, Boxed → False]
```

Out[64]=



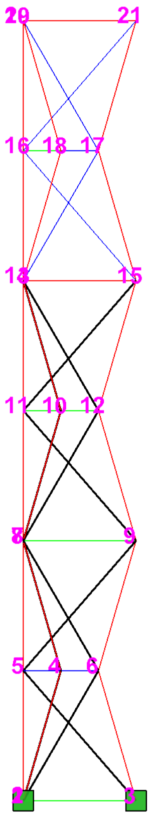
In[65]:= `Show[%, ViewPoint → {0, 0, ∞}]`

Out[65]=



In[66]:= `Show[%, ViewPoint → {-∞, 0, 0}]`

Out[66]=



In[67]:=
```
warunki brzegowe;
macierz sztywności liniowej;
nk = k;
Do[
  (
   ii = toss[[i]];
   Do[
    (
     nk[[ii, j]] = 0;
     nk[[j, ii]] = 0;
    ),
    {j, lgss}
   ];
   nk[[ii, ii]] = 1;
  ),
  {i, loss}
 ];
MatrixForm[nk];
macierz wydłużeń (wybieranie kolumn z macierzy);
nB = Table[0, {le}, {lnss}];
Do[
  (
   ii = tnss[[i]];
   Do[
    (
     nB[[j, i]] = B[[j, ii]];
    ),
    {j, le}
   ]

  ),
  {i, lnss}
 ];
nB // MatrixForm;
nd = nB.Transpose[nB];
nd // MatrixForm;
```

In[78]:=
```
ANALIZA SPEKTRALNA;
macierzy sztywnosci;
wnk = Eigenvalues[nk]
nk0 = Table[0, {lgss}];
lzk = 0;
Do[
  If [Abs[wnk[[i]]] < 10^(-5), (lzk++; nk0[[lzk]] = i;)],
  {i, lgss}
 ];
wwnk = Eigenvectors[nk];
wwk = Table[0, {lzk}, {lgss}];
Do[
  (
   ii = nk0[[i]];
   Do[
    (
     wwk[[i, k]] = wwnk[[ii, k]]
    ),
    {k, lgss}]
  ),
  {i, lzk}
 ];
nk0
wwk // Chop
```

Out[80]= {470 988., 466 204., 441 713., 390 960., 358 564., 344 301., 344 290., 321 047., 321 045., 313 382., 290 847., 290 835., 253 212., 235 056., 235 043., 224 915., 223 155., 223 151., 211 851., 211 833., 167 708., 167 697., 149 311., 148 337., 148 330., 138 020., 138 011., 120 421., 120 417., 119 762., 107 151., 107 148., 61 045.9, 61 042.3, 55 457.2, 43 018.1, 43 013.1, 26 175.6, 26 172.9, 22 531.8, 13 028.1, 13 026.6, 4045.18, 4044.75, 766.297, 766.19, 21.9648, 21.9613, 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 7.9747×10^{-11}, -3.75364×10^{-11}, 2.68643×10^{-11}, -2.06604×10^{-11}, 1.5568×10^{-11}, -3.45317×10^{-12}}

Out[87]= {58, 59, 60, 61, 62, 63, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}

Out[88]=
```
{{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -0.000726201, -0.000209654, -0.000628963, 0.000363101,
  -0.000209633, 0.000628963, 0.000363101, -0.000209675, -0.0363394, -0.0629364,
  0.0116927, -0.0363394, 0.0629361, 0.0116927, 0.0726788, -1.4524 × 10^-7, 0.0116962,
  0, -0.0672983, 0.0043756, -0.0582941, 0.0336613, 0.00437516, 0.0582941, 0.0336613,
  0.00437604, 0.139685, 0.241923, -0.0616111, 0.139685, -0.241917, -0.0616111,
  -0.279369, 2.886 × 10^-6, -0.0616296, -0.0666411, 0.0384373, -0.130379, 0.0666411,
  0.0384373, -0.130405, 0, -0.0769785, -0.130392, 0.205952, 0.356601, -0.221235,
  0.205952, -0.356776, -0.221235, -0.411904, -0.0000874448, -0.221301},
 {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -0.348029, -0.100476, -0.301428, 0.174014,
  -0.100466, 0.301428, 0.174014, -0.100486, -0.0311374, -0.0539965, -0.190553,
  -0.0311374, 0.0538573, -0.190553, 0.0622748, -0.0000696057, -0.190611,
  0, 0.0353327, -0.169955, 0.030716, -0.0178644, -0.169938, -0.030716,
  -0.0178644, -0.169972, -0.113911, -0.19747, -0.121733, -0.113911, 0.197096,
  -0.121733, 0.227823, -0.000187344, -0.12177, 0.166848, -0.0965378,
  -0.0281564, -0.166848, -0.0965378, -0.028162, 0, 0.192427, -0.0281592,
  0.0823705, 0.142451, 0, 0.0823705, -0.142864, 0, -0.164741, -0.000206851, 0},
 {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.0820421, 0.0236855, 0.0710566, -0.041021,
  0.0236832, -0.0710566, -0.041021, 0.0236879, -0.0613503, -0.106236,
  0.0678144, -0.0613503, 0.106269, 0.0678144, 0.122701, 0.0000164084,
  0.0678347, 0, 0.0988989, 0.11681, 0.0856156, -0.049379, 0.116798, -0.0856156,
  -0.049379, 0.116821, 0.0484218, 0.0839591, 0.129195, 0.0484218, -0.0837645,
  0.129195, -0.0968436, 0.0000973297, 0.129234, 0.276274, -0.159357, 0.205138,
  -0.276274, -0.159357, 0.205179, 0, 0.319123, 0.205159, 0.105262, 0.182544,
  0.262136, 0.105262, -0.182065, 0.262136, -0.210525, 0.000239455, 0.262215},
 {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -0.129709, -0.0374469, -0.112341, 0.0648543, -0.0374431,
  0.112341, 0.0648543, -0.0374506, -0.0197227, -0.0341837, -0.0683127, -0.0197227,
  0.0341318, -0.0683127, 0.0394454, -0.0000259417, -0.0683332, 0, 0.416999, 0.0586559,
  0.361203, -0.20857, 0.05865, -0.361203, -0.20857, 0.0586618, -0.0015594, -0.00268604,
  0.179559, -0.0015594, 0.00271542, 0.179559, 0.00311881, 0.0000146928, 0.179613,
  -0.253432, 0.146384, 0.0956096, 0.253432, 0.146384, 0.0956287, 0, -0.292536, 0.0956192,
  0.0334251, 0.0579699, 0, 0.0334251, -0.057808, 0, -0.0668501, 0.000080934, 0},
 {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.172434, 0.0497817, 0.149345, -0.086217, 0.0497767,
  -0.149345, -0.086217, 0.0497867, 0.0431203, 0.0747147, 0.0851814, 0.0431203,
  -0.0746457, 0.0851814, -0.0862407, 0.0000344868, 0.085207, 0, -0.124963, 0.0347228,
  -0.108281, 0.0625698, 0.0347193, 0.108281, 0.0625698, 0.0347262, -0.200094, -0.346485,
  0.0653206, -0.200094, 0.346602, 0.0653206, 0.400188, 0.0000585414, 0.0653402,
  -0.129618, 0.0749325, 0.0888105, 0.129618, 0.0749325, 0.0888283, 0, -0.149552,
  0.0888194, 0.136841, 0.237115, 0, 0.136841, -0.236874, 0, -0.273681, 0.000120072, 0},
 {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.0657593, 0.0189847, 0.0569541, -0.0328796,
  0.0189828, -0.0569541, -0.0328796, 0.0189866, 0.255555, 0.442608, -0.0472107,
  0.255555, -0.442582, -0.0472107, -0.511109, 0.0000131519, -0.0472249, 0,
  0.171325, -0.0829294, 0.148413, -0.0857114, -0.0829211, -0.148413, -0.0857114,
  -0.0829377, 0.0345643, 0.0598177, -0.0449754, 0.0345643, -0.0599062, -0.0449754,
  -0.0691286, -0.0000442984, -0.0449889, 0.105482, -0.0609585, -0.0213387,
  -0.105482, -0.0609585, -0.0213429, 0, 0.121725, -0.0213408, 0.0414594,
  0.0717444, 0, 0.0414594, -0.0718626, 0, -0.0829187, -0.0000590824, 0}}
```

In[89]:=
```
liczę ile jest zer w wektorze nk0 i ile jest różnych od zera wyrazów;
licz0 = 0;
licz1 = 0;
Do[If[nk0[[i]] == 0, licz0++, licz1++], {i, Length[nk0]}];
Print[licz0, " ", licz1];
```

57 6

In[94]:=
```
ANALIZA SPEKTRALNA;
macierzy d;
wartości i wektory własne;
wnd = Eigenvalues[nd];
n0 = Table[0, {le}];
lz = 0;
Do[
  If [Abs[wnd[[i]]] < 10^(-5), (lz++; n0[[lz]] = i;)],
  {i, le}
 ];
wwnd = Eigenvectors[nd];
ww = Table[0, {lz}, {le}];
Do[
  (
   ii = n0[[i]];
   Do[
    (
     ww[[i, k]] = wwnd[[ii, k]]
    ),
    {k, le}]
  ),
  {i, lz}
 ];
n0
ww;
```

Out[104]=
```
{49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
```

In[106]:=
```
liczę ile jest zer w wektorze n0 i ile jest różnych od zera wyrazów;
licz0 = 0;
licz1 = 0;
Do[If[n0[[i]] == 0, licz0++, licz1++], {i, Length[n0]}];
Print[licz0, " ", licz1];
```

```
48 9
```

In[111]:=
```
www = Table[0, {le}];
Do[www[[i]] = -1, {i, 1, 18}];
Do[www[[i]] = 0.7905, {i, 40, 57}];
Do[www[[i]] = 0.25, {i, 28, 39}];
Do[www[[i]] = 2 * 0.25, {i, {31, 32, 33, 34, 35, 39}}];
Do[www[[i]] = 2 * 0.4330, {i, 19, 27}];
ww1 = -www / Min[www]
```

Out[117]=
```
{-1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0.866, 0.866,
 0.866, 0.866, 0.866, 0.866, 0.866, 0.866, 0.866, 0.25, 0.25, 0.25, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5,
 0.5, 0.25, 0.25, 0.25, 0.5, 0.7905, 0.7905, 0.7905, 0.7905, 0.7905, 0.7905, 0.7905,
 0.7905, 0.7905, 0.7905, 0.7905, 0.7905, 0.7905, 0.7905, 0.7905, 0.7905, 0.7905, 0.7905}
```

In[118]:=
```
macierz sztywnosci geometrycznej;
wy0 = ww1;
str = OpenWrite["c:/doktorat/wieża_mod_Simplex_6.txt"];
Write[str, le];
Write[str, lw];
Do[Write[str, N[x[[is]]]], {is, lw}];
Do[Write[str, N[y[[is]]]], {is, lw}];
```

```
Do[Write[str, N[z[[is]]]], {is, lw}];
Do[Write[str, N[p1[[is]]]], {is, le}];
Do[Write[str, N[p2[[is]]]], {is, le}];
Do[Write[str, N[e[[is]]]], {is, le}];
Do[Write[str, N[a[[is]]]], {is, le}];
Write[str, loss];
Do[Write[str, N[toss[[is]]]], {is, loss}];
Do[Write[str, N[wy0[[is]]]], {is, le}];
Close[str];
kg = Table[0, {lgss}, {lgss}];
Do[
  (
   w1 = p1[[ne]];
   w2 = p2[[ne]];
   x1 = x[[w1]];
   y1 = y[[w1]];
   z1 = z[[w1]];
   x2 = x[[w2]];
   y2 = y[[w2]];
   z2 = z[[w2]];
   L = Sqrt[(x2 - x1) * (x2 - x1) + (y2 - y1) * (y2 - y1) + (z2 - z1) * (z2 - z1)];
   cx = (x2 - x1) / L;
   cy = (y2 - y1) / L;
   cz = (z2 - z1) / L;
   n[[3]] = 3 * w1;
   n[[2]] = n[[3]] - 1;
   n[[1]] = n[[3]] - 2;
   n[[6]] = 3 * w2;
   n[[5]] = n[[6]] - 1;
   n[[4]] = n[[6]] - 2;
   S = wy0[[ne]];
   k11 = (cy^2 + cx^2 * cz^2) / (cx^2 + cy^2);
   k12 = (cy * cx * (cz^2 - 1)) / (cx^2 + cy^2);
   k13 = - cx * cz;
   k22 = (cx^2 + cy^2 * cz^2) / (cx^2 + cy^2);
   k23 = - cy * cz;
   k33 = (cx^2 + cy^2);
   kge = (S / L) * {{1, 0, 0, -1, 0, 0},
          {0, 1, 0, 0, -1, 0},
          {0, 0, 1, 0, 0, -1},
          {-1, 0, 0, 1, 0, 0},
          {0, -1, 0, 0, 1, 0},
          {0, 0, -1, 0, 0, 1}};
   Do[
    Do[
     kg[[n[[i]], n[[j]]]] += kge[[i, j]],
     {j, llss}
    ],
    {i, llss}
   ]
  ),
  {ne, le}
 ];
warunki brzegowe macierzy sztywności geometrycznej;
```

```
nkg = kg;
Do[
  (
   ii = toss[[i]];
   Do[
    (
     nkg[[ii, j]] = 0;
     nkg[[j, ii]] = 0;
    ),
    {j, lgss}
   ];
   nkg[[ii, ii]] = 1;
  ),
  {i, loss}
 ];
MatrixForm[nkg];
ANALIZA SPEKTRALNA;
sumy macierzy sztywności liniowej i geometrycznej;
Eigenvalues[nk + nkg]
```

```
Out[142]= {470991., 466207., 441713., 390964., 358566., 344303., 344293., 321049.,
  321048., 313383., 290850., 290837., 253216., 235061., 235047., 224916.,
  223159., 223155., 211854., 211837., 167711., 167701., 149311., 148340.,
  148333., 138024., 138014., 120424., 120419., 119762., 107153., 107150.,
  61046.5, 61043., 55458.5, 43018.4, 43013.5, 26176., 26173.3, 22536.1,
  13028.3, 13026.8, 4045.34, 4044.92, 766.328, 766.221, 21.9658, 21.9622, 4.26148,
  3.78243, 2., 2., 2., 2., 2., 2., 2., 2., 2., 1.26284, 1.1111, 0.49911, 0.0602054}
```

In[143]:=
```
equ[p1_, p2_, x_, y_, z_, wy02_, element_] :=
 Module[{w1, w2, x1, y1, z1, x2, y2, z2, L, cx, cy, cz, sum1, sum},
  (sum = 0;
   Do[
    w1 = p1[[i]];
    w2 = p2[[i]];
    x1 = x[[w1]];
    y1 = y[[w1]];
    z1 = z[[w1]];
    x2 = x[[w2]];
    y2 = y[[w2]];
    z2 = z[[w2]];
    L = ((x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2 + (z2 - z1)^2)^0.5;
    cx = (x2 - x1) / L;
    cy = (y2 - y1) / L;
    cz = (z2 - z1) / L;
    sum1 = cx * wy02[[i]] + cy * wy02[[i]] + cz * wy02[[i]];
    If [element == p1[[i]], sum = sum + sum1, sum = sum];
    If[element == p2[[i]], sum = sum - sum1, sum = sum], {i, Length[p1]}];
   sum) ]

sumequ = 0;
Do[
  sumequ2 = equ[p1, p2, x, y, z, ww1, i];
  Print[i, "-", sumequ2];
  sumequ += sumequ2^2
  , {i, lw}];
sumequ
output2 = 1 / (sumequ^0.5 + 0.00001)
```

1--0.0000360461

2--0.0000157822

3--0.00007616

4--0.000113967

5-0.0000601435

6--0.0000199083

7-0.0000338278

8-0.000102524

9--0.0000626194

10--0.000113967

11-0.0000601435

12--0.0000199083

13-0.0000338278

14-0.000102524

15--0.0000626194

16-0.0000601435

17--0.0000199083

18--0.000113967

19-0.0000698739

20-0.000118306

21-0.0000135406

Out[146]= 1.08571×10^{-7}

Out[147]= 2945.5

In[343]:=
```
ClearAll["Global`*"];
MKlin[p1_, p2_, x_, y_, z_, e_, a_, le_, loss_, toss_, lgss_] := Module[
   (*
     q      -   wektor przemieszczen, dla liniowych zagadnien musi byc 0,
   dla nieliniowych jest inicjowany ostatnimi przyblizeniami;
     p1,p2 -   wektory numerow poczatkowych i koncowych wezlow  pretow;
     x,y,z -   wektory wspolzednych wezlow;
     e      -   wektor modulow Younga poszczegolnych pretow;
     a      -   wektor pol przekrojow poprzecznych poszczegolnych pretow;
     sne    -   wektor sil samonaprezen elementow (pretow);
     msne   -   mnoznik samonaprezen;
     le     -   liczba elementow;
     loss   -   liczba odebranych stopni swobody;
     toss   -   wektor odebranych stopni swobody;
     lgss   -   liczba globalnych stopni swobody;
   *)
   {
    Kl, Ks, Ku1, Ku2, Kge, Kg, T, u, w1, w2,
    x1, y1, z1, x2, y2, z2, x21, y21, z21, lxy, l, sa, ca, sb, s,
    cb, T1, se, q1, q2, ql1, ql2, dq, ea1l, ea2l, ea3l, sl, i,
    j, I1, I2, wi, ko, wd, kd, wm, km, Tt, nkg, ii
   },
   (
    Kl = Table[0, {6}, {6}];
    Kge = Table[0, {6}, {6}]; (*macierz sztywnosci elemntu w ukladzie globalnym *)
    Kg = Table[0, {lgss}, {lgss}]; (*globalna maciesz sztywnosci *)
    T = Table[0, {6}, {6}];
    (*macierz transformacji elementu - z globalnego do lokalnego*)

    Do[
     (
      w1 = p1[[i]];
      w2 = p2[[i]];
      x1 = x[[w1]];
      y1 = y[[w1]];
      z1 = z[[w1]];
      x2 = x[[w2]];
      y2 = y[[w2]];
      z2 = z[[w2]];
      x21 = (x2 - x1);
      y21 = (y2 - y1);
      z21 = (z2 - z1);
      lxy = Sqrt[x21 * x21 + y21 * y21];
      l = Sqrt[x21 * x21 + y21 * y21 + z21 * z21];

      If[lxy != 0,
       sa = z21 / l; ca = lxy / l; sb = y21 / lxy; cb = x21 / lxy;
       T1 = {{ca * cb, ca * sb, sa}, {-sb, cb, 0}, {-sa * cb, -sa * sb, ca}},
       T1 = {{0, 0, -1}, {-1, 0, 0}, {0, 1, 0}}
      ];

      se = {3 * w1 - 2, 3 * w1 - 1, 3 * w1, 3 * w2 - 2, 3 * w2 - 1, 3 * w2};

      ea1l = e[[i]] * a[[i]] / l;
```

```
      ea2l = ea1l / l;
      ea3l = ea2l / l;

      Do[Do[Do[Do[
           (
            wi = 3 * (wd - 1);
            ko = 3 * (kd - 1);
            T[[wi + wm, ko + km]] = T1[[wm, km]];
           )
           , {km, 3}], {wm, 3}], {kd, 2}], {wd, 2}]
      ];

      Do[Do[
         (
          T[[wm, km]] = T[[km, wm]] = 0;
         )
         , {km, 4, 6}], {wm, 1, 3}]
      ];

      Kl[[1, 1]] = Kl[[4, 4]] = ea1l;
      Kl[[4, 1]] = Kl[[1, 4]] = -Kl[[1, 1]];
      Kge = Kl;
      Tt = Transpose[T];
      Kge = Tt.Kge.T;
      Do[Do[
         (
          Kg[[se[[wm]], se[[km]]]] += Kge[[wm, km]];
         )
         , {km, 6}], {wm, 6}]
      ]
     ),
     {i, le}
    ];

    nkg = Kg;
    Do[
     (
      ii = toss[[i]];
      Do[
        (
         nkg[[ii, j]] = 0;
         nkg[[j, ii]] = 0;
        ),
        {j, lgss}
      ];
      nkg[[ii, ii]] = 1;
     ),
     {i, loss}
    ];
    nkg
   )
  ];
```

```
MKgeom[p1_, p2_, x_, y_, z_, e_, a_, sne_, msne_, le_, loss_, toss_, lgss_] := Module[
  (*
    q     -   wektor przemieszczen, dla liniowych zagadnien musi byc 0,
  dla nieliniowych jest inicjowany ostatnimi przyblizeniami;
    p1,p2 -   wektory numerow poczatkowych i koncowych wezlow  pretow;
    x,y,z -   wektory wspolzednych wezlow;
    e     -   wektor modulow Younga poszczegolnych pretow;
    a     -   wektor pol przekrojow poprzecznych poszczegolnych pretow;
    sne   -   wektor sil samonaprezen elementow (pretow);
    msne  -   mnoznik samonaprezen;
    le    -   liczba elementow;
    loss  -   liczba odebranych stopni swobody;
    toss  -   wektor odebranych stopni swobody;
    lgss  -   liczba globalnych stopni swobody;
  *)
  {
   Kl, Ks, Kge, Kg, T, u, w1, w2, x1,
   y1, z1, x2, y2, z2, x21, y21, z21, lxy, l, sa, ca, sb, s,
   cb, T1, se, q1, q2, ql1, ql2, dq, ea1l, ea2l, ea3l, sl, i,
   j, I1, I2, wi, ko, wd, kd, wm, km, Tt, nkg, ii
  },
  (
   Kl = Ks = Table[0, {6}, {6}];
   Kge = Table[0, {6}, {6}]; (*macierz sztywnosci elemntu w ukladzie globalnym *)
   Kg = Table[0, {lgss}, {lgss}]; (*globalna maciesz sztywnosci *)
   T = Table[0, {6}, {6}];
   (*macierz transformacji elementu - z globalnego do lokalnego*)
   u = Table[0, {3}];

   Do[
    (
     w1 = p1[[i]];
     w2 = p2[[i]];
     x1 = x[[w1]];
     y1 = y[[w1]];
     z1 = z[[w1]];
     x2 = x[[w2]];
     y2 = y[[w2]];
     z2 = z[[w2]];
     x21 = (x2 - x1);
     y21 = (y2 - y1);
     z21 = (z2 - z1);
     lxy = Sqrt[x21 * x21 + y21 * y21];
     l = Sqrt[x21 * x21 + y21 * y21 + z21 * z21];

     se = {3 * w1 - 2, 3 * w1 - 1, 3 * w1, 3 * w2 - 2, 3 * w2 - 1, 3 * w2};
     (*stoponie swobody element*)

     s = sne[[i]];
     sl = msne * s / l;

     Do[Ks[[j, j]] = sl, {j, 6}];
```

```
        Do[Ks[[j, j + 3]] = Ks[[j + 3, j]] = -sl, {j, 3}];

        Kge = Ks;

        Do[Do[
          (
           Kg[[se[[wm]], se[[km]]]] += Kge[[wm, km]];
          )
          , {km, 6}], {wm, 6}
        ]
       ),
       {i, le}
      ];

      nkg = Kg;
      Do[
       (
        ii = toss[[i]];
        Do[
         (
          nkg[[ii, j]] = 0;
          nkg[[j, ii]] = 0;
         ),
         {j, lgss}
        ];
        nkg[[ii, ii]] = 1;
       ),
       {i, loss}
      ];
      nkg
     )
    ];

MM[p1_, p2_, x_, y_, z_, e_, a_, ro_, le_, loss_, toss_, lgss_] := Module[
    (*
      p1,p2 -   wektory numerow poczatkowych i koncowych wezlow  pretow;
      x,y,z -   wektory wspolzednych wezlow;
      e     -   wektor modulow Younga poszczegolnych pretow;
      a     -   wektor pol przekrojow poprzecznych poszczegolnych pretow;
        ro    -   wektor gęstości,
      le    -   liczba elementow;
      loss  -   liczba odebranych stopni swobody;
      toss  -   wektor odebranych stopni swobody;
      lgss  -   liczba globalnych stopni swobody;
    *)
    {w1, w2, x1, x2, y1, y2, z1, z2, x21, y21, z21, l, se, Me, M, nM, i, j, ii, wm, km},
    (M = Table[0, {lgss}, {lgss}];
     Do[
      w1 = p1[[i]];
      w2 = p2[[i]];
      x1 = x[[w1]];
      y1 = y[[w1]];
      z1 = z[[w1]];
```

```
      x2 = x[[w2]];
      y2 = y[[w2]];
      z2 = z[[w2]];
      x21 = (x2 - x1);
      y21 = (y2 - y1);
      z21 = (z2 - z1);
      l = Sqrt[x21 * x21 + y21 * y21 + z21 * z21];
      se = {3 * w1 - 2, 3 * w1 - 1, 3 * w1, 3 * w2 - 2, 3 * w2 - 1, 3 * w2};
      Me = ro[[i]] * a[[i]] * l / 6 * {{2, 0, 0, 1, 0, 0},
          {0, 2, 0, 0, 1, 0},
          {0, 0, 2, 0, 0, 1},
          {1, 0, 0, 2, 0, 0},
          {0, 1, 0, 0, 2, 0},
          {0, 0, 1, 0, 0, 2}};
      Do[Do[
        M[[se[[wm]], se[[km]]]] += Me[[wm, km]];
        , {km, 6}], {wm, 6}
      ],
      {i, le}];
     nM = M;
     Do[
      (
       ii = toss[[i]];
       Do[
        (
         nM[[ii, j]] = 0;
         nM[[j, ii]] = 0;
        ),
        {j, lgss}
       ];
       nM[[ii, ii]] = 1;
      ),
      {i, loss}
     ];
     nM
    )
   ];

Sily[tob_, si_, sne_, msne_, le_, lgss_, p1_, p2_, x_, y_, z_] := Module[
    {T, f, i, j, w1, w2, x1, y1, z1, x2, y2, z2, x21, y21, z21,
     lxy, l, sa, ca, sb, cb, T1, ms, wi, wd, ko, kd, wm, km, Tt, pp, se, p},
    (*
      tob   -   tablica numerow obciazonych stopni swobody - sily zewnetrzne;

    si    -   tablica wartosci sil zewnetrznych odpowiednich stopniom swobody z tob;
      sne   -   wektor sil samonaprezen elementow (pretow);
      msne  -   mnoznik samonaprezen;
      le    -   liczba elementow;
      lgss  -   liczba globalnych stopni swobody;
      p1,p2 -   wektory numerow poczatkowych i koncowych wezlow  pretow;
      x,y,z -   wektory wspolzednych wezlow;
    *)
    (
     T = Table[0, {6}, {6}];
```

```
f = Table[0, {6}];
p = Table[0, {lgss}];

(*obciazenie zewnetrzne w ukladzie globalnym*)
Do[p[[tob[[i]]]] += si[[i]], {i, Length[tob]}];

(*
(*obciazenie wewnetrzne w ukladzie lokalnym*)
Do[
  (
   w1=p1[[i]];
   w2=p2[[i]];
   x1=x[[w1]];
   y1=y[[w1]];
   z1=z[[w1]];
   x2=x[[w2]];
   y2=y[[w2]];
   z2=z[[w2]];
   x21=(x2-x1);
   y21=(y2-y1);
   z21=(z2-z1);
   lxy=Sqrt[x21*x21+y21*y21];
   l=Sqrt[x21*x21+y21*y21+z21*z21];

   If[lxy!=0,
    sa=z21/l;ca=lxy/l;sb=y21/lxy;cb=x21/lxy;
    T1={{ca*cb,ca*sb,sa},{-sb,cb,0},{-sa*cb,-sa*sb,ca}},
    T1={{0,0,-1},{-1,0,0},{0,1,0}}
   ];

   Do[Do[Do[Do[
       (wi=3*(wd-1);ko=3*(kd-1);T[[wi+wm,ko+km]]=T1[[wm,km]]) ,
       {km,3}],{wm,3}],{kd,2}],{wd,2}
   ];

   Do[Do[
      (T[[wm,km]]=T[[km,wm]]=0),
      {km,4,6}],{wm,1,3}
   ];

   Tt=Transpose[T];
   ms=msne*sne[[i]];
   f={-ms,0,0,ms,0,0};

   pp=Tt.f;

   se={3*w1-2,3*w1-1,3*w1,3*w2-2,3*w2-1,3*w2}; (*stoponie swobody element*)
   Do[p[[se[[j]]]]-=pp[[j]],{j,6}];
  ),
  {i,le}
 ];
*)
p
```

```
  )
 ];


SilyPrety[qp_, p1_, p2_, x_, y_, z_, e_, a_, le_, loss_, toss_] := Module[
   (*
     qp     -   wektor przemieszczen, dla liniowych zagadnien musi byc 0,
   dla nieliniowych jest inicjowany ostatnimi przyblizeniami;
     p1,p2 -   wektory numerow poczatkowych i koncowych wezlow  pretow;
     x,y,z -   wektory wspolzednych wezlow;
     e     -   wektor modulow Younga poszczegolnych pretow;
     a     -   wektor pol przekrojow poprzecznych poszczegolnych pretow;
     le    -   liczba elementow;
     loss  -   liczba odebranych stopni swobody;
     toss  -   wektor odebranych stopni swobody;
   *)
   {
    q, SP, i, j, T, u, w1, w2, x1, y1, z1, x2, y2, z2, x21, y21, z21, lxy, l, sa, ca, sb,
    cb, T1, se, q1, q2, ql1, ql2, dq, l1, l1l, eps
   },
   (
    T = Table[0, {6}, {6}];
    (*macierz transformacji elementu - z globalnego do lokalnego*)
    SP = Table[0, {le}]; (*wektor sil w pretach*)
    u = Table[0, {3}];

    q = qp;
    Do[q[[toss[[i]]]] = 0, {i, loss}];
    (*Print["q=",q];*)

    Do[
     (
      w1 = p1[[i]];
      w2 = p2[[i]];
      x1 = x[[w1]];
      y1 = y[[w1]];
      z1 = z[[w1]];
      x2 = x[[w2]];
      y2 = y[[w2]];
      z2 = z[[w2]];
      x21 = (x2 - x1);
      y21 = (y2 - y1);
      z21 = (z2 - z1);
      lxy = Sqrt[x21 * x21 + y21 * y21];
      l = Sqrt[x21 * x21 + y21 * y21 + z21 * z21];

      If[lxy != 0,
       sa = z21 / l; ca = lxy / l; sb = y21 / lxy; cb = x21 / lxy;
       T1 = {{ca * cb, ca * sb, sa}, {-sb, cb, 0}, {-sa * cb, -sa * sb, ca}},
       T1 = {{0, 0, -1}, {-1, 0, 0}, {0, 1, 0}}
      ];

      se = {3 * w1 - 2, 3 * w1 - 1, 3 * w1, 3 * w2 - 2, 3 * w2 - 1, 3 * w2};
      (*stoponie swobody element*)
```

```
        q1 = {{q[[se[[1]]]]}, {q[[se[[2]]]]}, {q[[se[[3]]]]}};
        q2 = {{q[[se[[4]]]]}, {q[[se[[5]]]]}, {q[[se[[6]]]]}};
        (*
        Print["T1=",MatrixForm[T1]];
        Print["q1=",q1];
        Print["q2=",q2];
        *)

        ql1 = T1.q1;
        ql2 = T1.q2;
        dq = ql2 - ql1;

        Do[u[[j]] = dq[[j, 1]], {j, 3}];
        (*Print["u=",u];*)

        (*zdjecie, poczatek*)
        l1 = Sqrt[u[[2]] * u[[2]] + u[[3]] * u[[3]] + (l + u[[1]]) * (l + u[[1]])];
        l1l = l1 / l;
        eps = (l1l * l1l - 1) / 2;
        SP[[i]] = e[[i]] * a[[i]] * eps * l1l
        (*zdjecie, koniec*)

       ),
       {i, le}
      ];

      SP
     )
    ];

MK[q_, p1_, p2_, x_, y_, z_, e_, a_, sne_, msne_, le_, loss_, toss_, lgss_] := Module[
   (*
     q      -   wektor przemieszczen, dla liniowych zagadnien musi byc 0,
   dla nieliniowych jest inicjowany ostatnimi przyblizeniami;
     p1,p2 -   wektory numerow poczatkowych i koncowych wezlow  pretow;
     x,y,z -   wektory wspolzednych wezlow;
     e      -   wektor modulow Younga poszczegolnych pretow;
     a      -   wektor pol przekrojow poprzecznych poszczegolnych pretow;
     sne    -   wektor sil samonaprezen elementow (pretow);
     msne   -   mnoznik samonaprezen;
     le     -   liczba elementow;
     loss   -   liczba odebranych stopni swobody;
     toss   -   wektor odebranych stopni swobody;
     lgss   -   liczba globalnych stopni swobody;
   *)
   {
    Kl, Ks, Ku1, Ku2, Kge, Kg, T, u, w1, w2,
    x1, y1, z1, x2, y2, z2, x21, y21, z21, lxy, l, sa, ca, sb, s,
    cb, T1, se, q1, q2, ql1, ql2, dq, ea1l, ea2l, ea3l, sl, i,
    j, I1, I2, wi, ko, wd, kd, wm, km, Tt, nkg, ii
   },
   (
    Kl = Ks = Ku1 = Ku2 = Table[0, {6}, {6}];
    Kge = Table[0, {6}, {6}]; (*macierz sztywnosci elemntu w ukladzie globalnym *)
```

```
Kg = Table[0, {lgss}, {lgss}]; (*globalna maciesz sztywnosci *)
T = Table[0, {6}, {6}];
(*macierz transformacji elementu - z globalnego do lokalnego*)
u = Table[0, {3}];

Do[
 (
  w1 = p1[[i]];
  w2 = p2[[i]];
  x1 = x[[w1]];
  y1 = y[[w1]];
  z1 = z[[w1]];
  x2 = x[[w2]];
  y2 = y[[w2]];
  z2 = z[[w2]];
  x21 = (x2 - x1);
  y21 = (y2 - y1);
  z21 = (z2 - z1);
  lxy = Sqrt[x21 * x21 + y21 * y21];
  l = Sqrt[x21 * x21 + y21 * y21 + z21 * z21];

  If[lxy != 0,
   sa = z21 / l; ca = lxy / l; sb = y21 / lxy; cb = x21 / lxy;
   T1 = {{ca * cb, ca * sb, sa}, {-sb, cb, 0}, {-sa * cb, -sa * sb, ca}},
   T1 = {{0, 0, -1}, {-1, 0, 0}, {0, 1, 0}}
  ];

  se = {3 * w1 - 2, 3 * w1 - 1, 3 * w1, 3 * w2 - 2, 3 * w2 - 1, 3 * w2};
  (*stoponie swobody element*)
  q1 = {{q[[se[[1]]]]}, {q[[se[[2]]]]}, {q[[se[[3]]]]}};
  q2 = {{q[[se[[4]]]]}, {q[[se[[5]]]]}, {q[[se[[6]]]]}};

  ql1 = T1.q1;
  ql2 = T1.q2;
  dq = ql2 - ql1;

  ea1l = e[[i]] * a[[i]] / l;
  ea2l = ea1l / l;
  ea3l = ea2l / l;

  Kl[[1, 1]] = Kl[[4, 4]] = ea1l;
  Kl[[4, 1]] = Kl[[1, 4]] = -Kl[[1, 1]];

  s = sne[[i]];
  sl = msne * s / l;

  Do[u[[j]] = dq[[j, 1]], {j, 3}];
  (*sl=ea1l*u[[1]];*)
  Do[Ks[[j, j]] = sl, {j, 6}];
  Do[Ks[[j, j + 3]] = Ks[[j + 3, j]] = -sl, {j, 3}];

  I1 = {
    {3 * u[[1]], u[[2]], u[[3]]},
    {2 * u[[2]], 0, 0},
```

```
      {2 * u[[3]], 0, 0}
     };

    I2 = {
      {u[[1]] * u[[1]], u[[1]] * u[[2]], u[[1]] * u[[3]]},
      {u[[1]] * u[[2]], u[[2]] * u[[2]], u[[2]] * u[[3]]},
      {u[[1]] * u[[3]], u[[2]] * u[[3]], u[[3]] * u[[3]]}
     };

    Do[Do[Do[Do[
        (
         wi = 3 * (wd - 1);
         ko = 3 * (kd - 1);
         Ku1[[wi + wm, ko + km]] = ea2l * I1[[wm, km]];
         Ku2[[wi + wm, ko + km]] = ea3l * I2[[wm, km]]; (*poprawione*)
         T[[wi + wm, ko + km]] = T1[[wm, km]];
        )
        , {km, 3}], {wm, 3}], {kd, 2}], {wd, 2}
    ];

    Do[Do[
      (
       Ku1[[wm, km]] = -Ku1[[wm, km]];
       Ku1[[km, wm]] = -Ku1[[km, wm]];
       Ku2[[wm, km]] = -Ku2[[wm, km]];
       Ku2[[km, wm]] = -Ku2[[km, wm]];
       T[[wm, km]] = T[[km, wm]] = 0;
      )
      , {km, 4, 6}], {wm, 1, 3}
    ];

    Kge = Kl + Ks + Ku1 / 2. + Ku2 / 2.;
    Tt = Transpose[T];
    Kge = Tt.Kge.T;

    Do[Do[
      (
       Kg[[se[[wm]], se[[km]]]] += Kge[[wm, km]];
      )
      , {km, 6}], {wm, 6}
    ]
   ),
   {i, le}
  ];

  nkg = Kg;
  Do[
   (
    ii = toss[[i]];
    Do[
     (
      nkg[[ii, j]] = 0;
      nkg[[j, ii]] = 0;
```

```
      ),
      {j, lgss}
     ];
     nkg[[ii, ii]] = 1;
    ),
    {i, loss}
   ];
   nkg
  )
 ];

MKsty[q_, p1_, p2_, x_, y_, z_, e_, a_, sne_, msne_, le_, loss_, toss_, lgss_] := Module[
  (*
    q      -   wektor przemieszczen, dla liniowych zagadnien musi byc 0,
   dla nieliniowych jest inicjowany ostatnimi przyblizeniami;
    p1,p2 -   wektory numerow poczatkowych i koncowych wezlow  pretow;
    x,y,z -   wektory wspolzednych wezlow;
    e      -   wektor modulow Younga poszczegolnych pretow;
    a      -   wektor pol przekrojow poprzecznych poszczegolnych pretow;
    sne    -   wektor sil samonaprezen elementow (pretow);
    msne   -   mnoznik samonaprezen;
    le     -   liczba elementow;
    loss   -   liczba odebranych stopni swobody;
    toss   -   wektor odebranych stopni swobody;
    lgss   -   liczba globalnych stopni swobody;
  *)
  {
   Kl, Ks, Ku1, Ku2, Kp, Kge, Kg, T, u, w1,
   w2, x1, y1, z1, x2, y2, z2, x21, y21, z21, lxy, l, sa, ca, sb, s,
   cb, T1, se, q1, q2, ql1, ql2, dq, ea1l, ea2l, ea3l, sl, su,
   i, j, I1, I2, wi, ko, wd, kd, wm, km, Tt, nkg, ii
  },
  (
   Kl = Ks = Ku1 = Ku2 = Kp = Table[0, {6}, {6}];
   Kge = Table[0, {6}, {6}]; (*macierz sztywnosci elemntu w ukladzie globalnym *)
   Kg = Table[0, {lgss}, {lgss}]; (*globalna maciesz sztywnosci *)
   T = Table[0, {6}, {6}];
   (*macierz transformacji elementu - z globalnego do lokalnego*)
   u = Table[0, {3}];
   Do[
    (
     w1 = p1[[i]];
     w2 = p2[[i]];
     x1 = x[[w1]];
     y1 = y[[w1]];
     z1 = z[[w1]];
     x2 = x[[w2]];
     y2 = y[[w2]];
     z2 = z[[w2]];
     x21 = (x2 - x1);
     y21 = (y2 - y1);
     z21 = (z2 - z1);
     lxy = Sqrt[x21 * x21 + y21 * y21];
     l = Sqrt[x21 * x21 + y21 * y21 + z21 * z21];
```

```
If[lxy != 0,
 sa = z21 / l; ca = lxy / l; sb = y21 / lxy; cb = x21 / lxy;
 T1 = {{ca * cb, ca * sb, sa}, {-sb, cb, 0}, {-sa * cb, -sa * sb, ca}},
 T1 = {{0, 0, -1}, {-1, 0, 0}, {0, 1, 0}}
];

se = {3 * w1 - 2, 3 * w1 - 1, 3 * w1, 3 * w2 - 2, 3 * w2 - 1, 3 * w2};
(*stoponie swobody element*)
q1 = {{q[[se[[1]]]]}, {q[[se[[2]]]]}, {q[[se[[3]]]]}};
q2 = {{q[[se[[4]]]]}, {q[[se[[5]]]]}, {q[[se[[6]]]]}};

ql1 = T1.q1;
ql2 = T1.q2;
dq = ql2 - ql1;

ea1l = e[[i]] * a[[i]] / l;
ea2l = ea1l / l;
ea3l = ea2l / l;

Kl[[1, 1]] = Kl[[4, 4]] = ea1l;
Kl[[4, 1]] = Kl[[1, 4]] = -Kl[[1, 1]];

s = sne[[i]];
sl = msne * s / l;

Do[u[[j]] = dq[[j, 1]], {j, 3}];
(*sl=ea1l*u[[1]];*)
Do[Ks[[j, j]] = sl, {j, 6}];
Do[Ks[[j, j + 3]] = Ks[[j + 3, j]] = -sl, {j, 3}];

su = (u[[1]] * u[[1]] + u[[2]] * u[[2]] + u[[3]] * u[[3]] / 2);
Do[Kp[[j, j]] = su * ea3l, {j, 6}];
Do[Kp[[j, j + 3]] = Ks[[j + 3, j]] = -su * ea3l, {j, 3}];

I1 = {
  {3 * u[[1]], u[[2]], u[[3]]},
  {u[[2]], u[[1]], 0},
  {u[[3]], 0, u[[1]]}
 };

I2 = {
  {u[[1]] * u[[1]], u[[1]] * u[[2]], u[[1]] * u[[3]]},
  {u[[1]] * u[[2]], u[[2]] * u[[2]], u[[2]] * u[[3]]},
  {u[[1]] * u[[3]], u[[2]] * u[[3]], u[[3]] * u[[3]]}
 };

Do[Do[Do[Do[
     (
      wi = 3 * (wd - 1);
      ko = 3 * (kd - 1);
      Ku1[[wi + wm, ko + km]] = ea2l * I1[[wm, km]];
      Ku2[[wi + wm, ko + km]] = ea3l * I2[[wm, km]]; (*poprawione*)
      T[[wi + wm, ko + km]] = T1[[wm, km]];
     )
```

```
          , {km, 3}], {wm, 3}], {kd, 2}], {wd, 2}
      ];

      Do[Do[
        (
         Ku1[[wm, km]] = -Ku1[[wm, km]];
         Ku1[[km, wm]] = -Ku1[[km, wm]];
         Ku2[[wm, km]] = -Ku2[[wm, km]];
         Ku2[[km, wm]] = -Ku2[[km, wm]];
         T[[wm, km]] = T[[km, wm]] = 0;
        )
        , {km, 4, 6}], {wm, 1, 3}
      ];

      Kge = Kl + Ks + Ku1 + Ku2 + Kp;
      Tt = Transpose[T];
      Kge = Tt.Kge.T;

      Do[Do[
        (
         Kg[[se[[wm]], se[[km]]]] += Kge[[wm, km]];
        )
        , {km, 6}], {wm, 6}
      ]
     ),
     {i, le}
    ];

    nkg = Kg;
    Do[
     (
      ii = toss[[i]];
      Do[
       (
        nkg[[ii, j]] = 0;
        nkg[[j, ii]] = 0;
       ),
       {j, lgss}
      ];
      nkg[[ii, ii]] = 1;
     ),
     {i, loss}
    ];
    nkg
   )
  ];


Newton[sl_, tsl_, qg_, p_, p1_, p2_, x_, y_,
   z_, e_, a_, sne_, msne_, le_, loss_, toss_, lgss_] := Module[
   (*
     sl    -   sledzenie, 1 - sledzenie, inne wartosci - brak sledzenia;
     tsl   -   tablica numerow sledzonych przemieszczen;
```

```
  q     -   wektor przemieszczen, dla liniowych zagadnien musi byc 0,
dla nieliniowych jest inicjowany ostatnimi przyblizeniami;
  p1,p2 -   wektory numerow poczatkowych i koncowych wezlow  pretow;
  x,y,z -   wektory wspolzednych wezlow;
  e     -   wektor modulow Younga poszczegolnych pretow;
  a     -   wektor pol przekrojow poprzecznych poszczegolnych pretow;
  sne   -   wektor sil samonaprezen elementow (pretow);
  msne  -   mnoznik samonaprezen;
  le    -   liczba elementow;
  loss  -   liczba odebranych stopni swobody;
  toss  -   wektor odebranych stopni swobody;
  lgss  -   liczba globalnych stopni swobody;
*)
{KK, krs, ws, qp, tkrs, A, ff, tz, is, stop, fp, f, q1, KK1, f1, eps, dp, i, j, q, tpo},
q = qg;

is = 0;
ws = 10^(-6); (*warunek stopu*)
KK = MK[q, p1, p2, x, y, z, e, a, sne, msne, le, loss, toss, lgss];
qp = q;
q = LinearSolve[KK, p];
(*q=Inverse[KK].p;*)

If[sl == 1,
 Print["iteracja ", is];
 tpo = Table[0, {Length[tsl]}];
 Do[tpo[[i]] = q[[tsl[[i]]]],
  {i, Length[tsl]}];
 Print[ScientificForm[tpo]]
];

A = Table[0, {lgss}, {lgss}];
ff = Table[0, {lgss}];
(*tablica znacznikow odebrania stopnia swobody 1-nieodebrany, 0-odebrany*)
tz = Table[1, {lgss}]; Do[tz[[toss[[i]]]] = 0, {i, loss}];
stop = 1;

While[ stop > ws,
 (
  is++;
  KK = MK[q, p1, p2, x, y, z, e, a, sne, msne, le, loss, toss, lgss];
  f = KK.q;
  fp = f - p;

  A = MKsty[q, p1, p2, x, y, z, e, a, sne, msne, le, loss, toss, lgss];
  eps = LinearSolve[A, fp];
  (*eps=Inverse[A].fp;*)
  qp = q;
  q = qp - eps;

  If[sl == 1,
   Print["iteracja ", is];
   tpo = Table[0, {Length[tsl]}];
   Do[tpo[[i]] = q[[tsl[[i]]]],
    {i, Length[tsl]}];
```

```
     Print[ScientificForm[tpo]]
    ];

    dp = 0;
    Do[(dp += eps[[j]] * eps[[j]]), {j, lgss}];
    stop = Sqrt[dp];
    If[is > 100000, Print["Przekroczona liczba dopuszczalnch iteracji"];
     Break[]];
    ismax = is;
   )
  ];
  q
 ];

NewtonRaphson[sl_, tsl_, qg_, p_, p1_, p2_, x_,
   y_, z_, e_, a_, sne_, msne_, le_, loss_, toss_, lgss_] := Module[
   (*
     sl    -   sledzenie, 1 - sledzenie, inne wartosci - brak sledzenia;
     tsl   -   tablica numerow sledzonych przemieszczen;
     q     -   wektor przemieszczen, dla liniowych zagadnien musi byc 0,
   dla nieliniowych jest inicjowany ostatnimi przyblizeniami;
     p1,p2 -   wektory numerow poczatkowych i koncowych wezlow  pretow;
     x,y,z -   wektory wspolzednych wezlow;
     e     -   wektor modulow Younga poszczegolnych pretow;
     a     -   wektor pol przekrojow poprzecznych poszczegolnych pretow;
     sne   -   wektor sil samonaprezen elementow (pretow);
     msne  -   mnoznik samonaprezen;
     le    -   liczba elementow;
     loss  -   liczba odebranych stopni swobody;
     toss  -   wektor odebranych stopni swobody;
     lgss  -   liczba globalnych stopni swobody;
   *)
   {q, ws, qp, KK, f, dQ, stop, is, lpwe, dq, dp, i, tpo},
   q = qg; (*przemieszczeni oczatkowe, zerowe*)
   ws = 10^(-4); (*warunek stopu*)

   is = 0;
   (*rozwiazanie liniowe - pierwsza iteracja, poczatek*)
   qp = q; (*poprzednie przyblizenie rozwiazania*)
   KK = MKsty[q, p1, p2, x, y, z, e, a, sne, msne, le, loss, toss, lgss];
   q = LinearSolve[KK, p];

   If[sl == 1,
    Print["iteracja ", is];
    tpo = Table[0, {Length[tsl]}];
    Do[tpo[[i]] = q[[tsl[[i]]]],
     {i, Length[tsl]}];
    Print[ScientificForm[tpo]]
   ];

   KK = MK[q, p1, p2, x, y, z, e, a, sne, msne, le, loss, toss, lgss];
   f = KK.q;
   dQ = p - f;
   (*rozwiazanie liniowe - pierwsza iteracja, koniec*)
```

```
(*dlugos wektora przyrostu obciazenia, poczatek*)
dp = 0;
Do[(dp += dQ[[j]] * dQ[[j]]), {j, lgss}];
stop = Sqrt[dp];
(*dlugosc wektora przyrostu obciazenia, konic*)

(*iteracyjny proces NR, poczatek*)
While[ stop > ws,
 (
  is++;
  KK = MKsty[q, p1, p2, x, y, z, e, a, sne, msne, le, loss, toss, lgss];
  dq = LinearSolve[KK, dQ];
  q = q + dq;

  If[sl == 1,
   Print["iteracja ", is];
   tpo = Table[0, {Length[tsl]}];
   Do[tpo[[i]] = q[[tsl[[i]]]],
    {i, Length[tsl]}];
   Print[ScientificForm[tpo]];
  ];

  KK = MK[q, p1, p2, x, y, z, e, a, sne, msne, le, loss, toss, lgss];
  f = KK.q;
  dQ = p - f;

  dp = 0;
  Do[(dp += dQ[[j]] * dQ[[j]]), {j, lgss}];
  stop = Sqrt[dp];
  If[is > 50000, Print["Przekroczona liczba dopuszczalnch iteracji"];
   Break[]];
 )
];
(*Print["liczba iteracji NR = ",is];*)
q
];
```

In[353]:=

```
(*c:/doktorat/*)
str = OpenRead["c:/doktorat/MQW2.txt"];
le = Read[str, Number];
lw = Read[str, Number];
x = y = z = Table[0, {lw}];
Do[x[[is]] = Read[str, Number], {is, lw}];
Do[y[[is]] = Read[str, Number], {is, lw}];
Do[z[[is]] = Read[str, Number], {is, lw}];

p1 = p2 = e = a = sne = Table[0, {le}];
Do[p1[[is]] = Read[str, Number], {is, le}];
Do[p2[[is]] = Read[str, Number], {is, le}];
Do[e[[is]] = Read[str, Number], {is, le}];
Do[a[[is]] = Read[str, Number], {is, le}];
loss = Read[str, Number];

toss = Table[0, {loss}];
```

```
Do[toss[[is]] = Read[str, Number], {is, loss}];
Do[sne[[is]] = Read[str, Number], {is, le}];
Close[str];
ro = Table[7860, {le}];
wy0 = sne;
lgss = 3 * lw;
step = Range[0.0, 1, 0.5];
msnei = Sort[Range[100, 110, 10], Greater]

P = -10;
Pt = Range[0, 1, 1/3] * 0.75 * P

qq = qq2 = mSwP = mF = mOmega = Table[0, {Length[msnei]}];
qq0 = qq02 = mOmega0 = Table[0, {Length[msnei]}];
qq3 = qq4 = Table[0, {Length[Pt]}];
mOmega2 = mOmega3 = Table[0, {Length[msnei]}, {Length[Pt]}];
q0 = Table[0, {lgss}];
nn = Table[0, {step}];

tsl = {20 * 3};  (*tablica sledzonch stopni swobody*)
tob = {20 * 3}; (*tablica obciazonych stopni swobody*)

si1 = P;(*obciazenie w kiloNiutonach*)

Do[
 msne = msnei[[ii]]; (*mnożnik stanu samonaprężenia*)
 Print["mnożnik ", msne];
 p0 = Table[0, {lgss}];
 KK = MK[q0, p1, p2, x, y, z, e, a, sne, msne, le, loss, toss, lgss];
 q02 = LinearSolve[KK, p0];
 qq02[[ii]] = q02;
 If[ii == 1,
  q00 = Newton[0, tsl, q02, p0, p1, p2, x, y, z, e, a, sne, msne, le, loss, toss, lgss],
  q00 =
   Newton[0, tsl, qq0[[ii - 1]], p0, p1, p2, x, y, z, e, a, sne, msne, le, loss, toss, lgss]
 ];
 qq0[[ii]] = q00;

 tpo0 = Table[0, {Length[tsl]}];
 Do[tpo0[[i]] = q00[[tsl[[i]]]],
  {i, Length[tsl]}];
 Print["wyniki  ", ScientificForm[tpo0]];
 Print["iteracja ", ismax];
 Print["q=", q00];
 (************sily w pretach**************)
 SwP0 = SilyPrety[q00, p1, p2, x, y, z, e, a, le, loss, toss];
 ssf0 = SwP0 + msne * sne;
 Print["sily w pretach ", ssf0];
 (*sprawdzenie, poczatek*)
 KK = MK[q00, p1, p2, x, y, z, e, a, sne, msne, le, loss, toss, lgss];
 Sly = KK.q00;
 prog = 10^(-3); (*ponizej tej wartosci elementy beda zerowane*)
 Do[If[Abs[Sly[[i]]] < prog, Sly[[i]] = 0], {i, lgss}];
 Print["spr ", N[Sly, 3]];
 (*sprawdzenie*)
```

```
(*dynamika*)
Kdyn0 = MK[q0, p1, p2, x, y, z, e, a, ssf0, 1, le, loss, toss, lgss];
M = MM[p1, p2, x, y, z, e, a, ro, le, loss, toss, lgss];

omega0 = Sort[(Eigenvalues[{Kdyn0, M}] * 1000)^0.5 / 2 / Pi];
For[d = Length[omega0], d > 0, d--,
 {If[Abs[omega0[[d]] - 5.0329] < 0.0001, omega0[[d]] = Sequence[]]}];
mOmega0[[ii]] = omega0;
Print["częstotliwości drgan własnych", omega0];

si = Table[si1, {Length[tob]}];
Do[si[[i]] = si1, {i, Length[tob]}];
p = Sily[tob, si, sne, msne, le, lgss, p1, p2, x, y, z];
KK = MK[q0, p1, p2, x, y, z, e, a, sne, msne, le, loss, toss, lgss];
q2 = LinearSolve[KK, p];
qq2[[ii]] = q2;
Do[
 Print["mnożnik ", msne, ", step ", step[[n]]];
 If[n == 1,
  q = Newton[0, tsl, q2, step[[n]] * p,
    p1, p2, x, y, z, e, a, sne, msne, le, loss, toss, lgss],
  q = Newton[0, tsl, nn[[n - 1]], step[[n]] * p, p1, p2, x, y,
    z, e, a, sne, msne, le, loss, toss, lgss]
 ];
 nn[[n]] = q;
 SwP = SilyPrety[q, p1, p2, x, y, z, e, a, le, loss, toss];
 ssf = SwP + msne * sne;
 Print[ssf],
 {n, 1, Length[step]}];
Print["mnożnik ", msne];
qq[[ii]] = q;

(*macierze*)
MacSty = MKsty[q, p1, p2, x, y, z, e, a, sne, msne, le, loss, toss, lgss];
MacSie = MK[q, p1, p2, x, y, z, e, a, sne, msne, le, loss, toss, lgss];

tpo = Table[0, {Length[tsl]}];
Do[tpo[[i]] = q[[tsl[[i]]]],
 {i, Length[tsl]}];
Print["wyniki  ", ScientificForm[tpo]];
Print["iteracja ", ismax];
Print["q=", q];
(************sily w pretach**************)
SwP = SilyPrety[q, p1, p2, x, y, z, e, a, le, loss, toss];
ssf = SwP + msne * sne;
Print["sily w pretach ", ssf];
mSwP[[ii]] = SwP;
(*sprawdzenie, poczatek*)
KK = MK[q, p1, p2, x, y, z, e, a, sne, msne, le, loss, toss, lgss];
Sly = KK.q;
prog = 10^(-3); (*ponizej tej wartosci elementy beda zerowane*)
Do[If[Abs[Sly[[i]]] < prog, Sly[[i]] = 0], {i, lgss}];
Print["spr ", N[Sly, 3]];
(*sprawdzenie*)
(*dynamika*)
```

```
Kdyn = MK[q0, p1, p2, x, y, z, e, a, ssf, 1, le, loss, toss, lgss];
Kg = MKgeom[p1, p2, x, y, z, e, a, ssf, 1, le, loss, toss, lgss];
Kl = MKlin[p1, p2, x, y, z, e, a, le, loss, toss, lgss];
M = MM[p1, p2, x, y, z, e, a, ro, le, loss, toss, lgss];

omega1 = Sort[(Eigenvalues[{Kdyn, M}] * 1000)^0.5 / 2 / Pi];
For[d = Length[omega1], d > 0, d--,
 {If[Abs[omega1[[d]] - 5.0329] < 0.0001, omega1[[d]] = Sequence[]]}];
mOmega[[ii]] = omega1;
Print["częstotliwości drgan wymuszonych", omega1];

Do[
 si3 = Table[(P + 0.5 * Pt[[iii]]), {Length[tob]}];
 Do[si3[[i]] = (P + 0.5 Pt[[iii]]), {i, Length[tob]}];
 p3 = Sily[tob, si3, sne, msne, le, lgss, p1, p2, x, y, z];
 q3 = Table[0., {lgss}];
 Print[Pt[[iii]]];
 If[iii == 1,
  q3 =
   Newton[0, tsl, qq[[ii]], p3, p1, p2, x, y, z, e, a, sne, msne, le, loss, toss, lgss],
  q3 = Newton[0, tsl, qq3[[iii - 1]], p3, p1, p2, x, y, z,
    e, a, sne, msne, le, loss, toss, lgss]
 ];
 qq3[[iii]] = q3;
 SwP3 = SilyPrety[q3, p1, p2, x, y, z, e, a, le, loss, toss];
 ssf3 = SwP3 + msne * sne;

 Kg3 = MKgeom[p1, p2, x, y, z, e, a, ssf3, 1, le, loss, toss, lgss];
 omega2 = Sort[(Eigenvalues[{(Kl + Kg3), M / 4}] * 1000)^0.5 / 2 / Pi];
 For[d = Length[omega2], d > 0, d--,
  {If[Abs[omega2[[d]] - 14.2353] < 0.0001, omega2[[d]] = Sequence[]]}];

 mOmega2[[ii, iii]] = omega2;
 Print["częstotliwość przy +Pt ", omega2];

 si4 = Table[(P - 0.5 * Pt[[iii]]), {Length[tob]}];
 Do[si4[[i]] = (P - 0.5 * Pt[[iii]]), {i, Length[tob]}];
 p4 = Sily[tob, si4, sne, msne, le, lgss, p1, p2, x, y, z];
 q4 = Table[0., {lgss}];
 If[iii == 1,
  q4 =
   Newton[0, tsl, qq[[ii]], p4, p1, p2, x, y, z, e, a, sne, msne, le, loss, toss, lgss],
  q4 = Newton[0, tsl, qq4[[iii - 1]], p4, p1, p2, x, y, z,
    e, a, sne, msne, le, loss, toss, lgss]
 ];
 qq4[[iii]] = q4;
 SwP4 = SilyPrety[q4, p1, p2, x, y, z, e, a, le, loss, toss];
 ssf4 = SwP4 + msne * sne;

 Kg4 = MKgeom[p1, p2, x, y, z, e, a, ssf4, 1, le, loss, toss, lgss];
 omega3 = N[Sort[(Eigenvalues[{(Kl + Kg4), M / 4}] * 1000)^0.5 / 2 / Pi], 4];
 For[d = Length[omega3], d > 0, d--,
  {If[Abs[omega3[[d]] - 14.2353] < 0.0001, omega3[[d]] = Sequence[]]}];

 mOmega3[[ii, iii]] = omega3;
```

```
  Print["częstotliwość przy -Pt ", omega3];
  , {iii, 1, Length[Pt]}];
 ,
 {ii, Length[msnei]}]
```

Out[374]= {110, 100}

Out[376]= {0., -2.5, -5., -7.5}

```
mnożnik 110

wyniki  {0.}

iteracja 1

q={0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.,
  0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.,
  0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.}

sily w pretach {36.6667, 36.6667, 36.6667, 36.6667, -110., -110., -110., -110., 81.9892,
  81.9892, 81.9892, 81.9892, 103.709, 103.709, 103.709, 103.709, -110., -110., -110., -110.,
  81.9892, 81.9892, 81.9892, 81.9892, 73.3333, 73.3333, 73.3333, 73.3333, -110., -110., -110.,
  -110., 81.9892, 81.9892, 81.9892, 81.9892, 103.709, 103.709, 103.709, 103.709, -110., -110.,
  -110., -110., 81.9892, 81.9892, 81.9892, 81.9892, 36.6667, 36.6667, 36.6667, 36.6667}

spr {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
  0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}

częstotliwości drgan własnych
 {5.99968, 16.2052, 17.8225, 17.8225, 23.2277, 27.6155, 30.894, 108.241, 108.241, 153.689,
  219.22, 219.22, 232.883, 327.179, 327.179, 360.598, 360.598, 380.149, 446.38, 546.005,
  556.611, 556.611, 583.765, 596.334, 618.458, 668.621, 678.613, 678.613, 734.99,
  761.664, 802.339, 802.339, 895.272, 906.409, 912.053, 912.053, 992.617, 1049.29,
  1066.5, 1066.5, 1085.87, 1112.2, 1112.2, 1118., 1154.39, 1277.71, 1277.71, 1364.59}

mnożnik 110, step 0.

{36.6667, 36.6667, 36.6667, 36.6667, -110., -110., -110., -110., 81.9892, 81.9892, 81.9892,
 81.9892, 103.709, 103.709, 103.709, 103.709, -110., -110., -110., -110., 81.9892, 81.9892,
 81.9892, 81.9892, 73.3333, 73.3333, 73.3333, 73.3333, -110., -110., -110., -110.,
 81.9892, 81.9892, 81.9892, 81.9892, 103.709, 103.709, 103.709, 103.709, -110., -110.,
 -110., -110., 81.9892, 81.9892, 81.9892, 81.9892, 36.6667, 36.6667, 36.6667, 36.6667}

mnożnik 110, step 0.5

{36.6667, 36.6667, 36.6667, 36.6667, -108.059, -111.76, -114.528, -110.63,
 84.5107, 72.9809, 87.0736, 81.4991, 104.81, 104.691, 104.751, 104.695, -110.425,
 -114.122, -107.639, -111.535, 80.4977, 79.3827, 77.4952, 87.7524, 74.6767, 74.4942,
 74.6968, 74.5267, -108.86, -112.605, -113.135, -109.316, 78.4996, 78.5599,
 81.195, 87.0172, 104.635, 105.016, 104.557, 104.991, -109.13, -112.92, -109.722,
 -113.545, 84.4277, 75.9483, 81.5855, 84.3514, 37.8863, 36.9632, 36.6125, 38.2494}

mnożnik 110, step 1.

{36.6667, 36.6667, 36.6667, 36.6667, -107.119, -114.448, -120.201, -112.072,
 87.8334, 64.6654, 92.5102, 82.0342, 106.859, 106.518, 106.621, 106.527, -111.683,
 -118.998, -106.033, -114.153, 79.9611, 77.2873, 73.5121, 94.0654, 76.6088,
 76.2201, 76.6921, 76.3507, -108.63, -116.145, -117.296, -109.484, 75.833, 75.6574,
 81.0477, 92.7941, 106.738, 107.462, 106.418, 107.359, -109.621, -117.319, -110.735,
 -118.559, 87.9331, 70.911, 82.1288, 87.8349, 39.6138, 37.6951, 37.0025, 40.3556}

mnożnik 110
```

wyniki $\{-2.20405\times 10^{-2}\}$

iteracja 113

q={0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., -0.00844302, 0.0000701208,
-0.0042654, -0.000231584, -0.00823365, -0.00395928, 0.00848313, 0.000373183,
-0.00461659, 0.000269592, 0.00867548, -0.00427382, -0.0177642, 0.0175332,
-0.00917238, -0.0182495, -0.0151216, -0.00736632, 0.0170167, -0.0157016,
-0.00922023, 0.0174994, 0.0169569, -0.00869614, -0.026367, 0.00499991, -0.0114642,
0.000911518, -0.0238161, -0.0134669, 0.0244227, -0.00130836, -0.0124757, -0.002854,
0.0275002, -0.0144473, -0.0299185, 0.0427268, -0.0138481, -0.0328745, -0.0344897,
-0.0193379, 0.0259518, -0.0362209, -0.0138492, 0.0289674, 0.0410139, -0.0220405}

sily w pretach {36.6667, 36.6667, 36.6667, 36.6667, -107.119, -114.448, -120.201,
-112.072, 87.8334, 64.6654, 92.5102, 82.0342, 106.859, 106.518, 106.621, 106.527,
-111.683, -118.998, -106.033, -114.153, 79.9611, 77.2873, 73.5121, 94.0654, 76.6088,
76.2201, 76.6921, 76.3507, -108.63, -116.145, -117.296, -109.484, 75.833, 75.6574,
81.0477, 92.7941, 106.738, 107.462, 106.418, 107.359, -109.621, -117.319, -110.735,
-118.559, 87.9331, 70.911, 82.1288, 87.8349, 39.6138, 37.6951, 37.0025, 40.3556}

spr {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -10.}

częstotliwości drgan wymuszonych
{6.02864, 16.2788, 17.7844, 17.7902, 23.5307, 27.7264, 31.0351, 108.202, 108.207, 153.69,
219.176, 219.214, 232.912, 327.165, 327.176, 360.601, 360.615, 380.169, 446.378,
546.016, 556.611, 556.626, 583.793, 596.355, 618.455, 668.631, 678.624, 678.634,
734.996, 761.67, 802.346, 802.363, 895.273, 906.418, 912.055, 912.077, 992.626, 1049.29,
1066.5, 1066.51, 1085.87, 1112.2, 1112.21, 1118., 1154.38, 1277.71, 1277.72, 1364.58}

0.

częstotliwość przy +Pt
{12.0572, 32.5574, 35.5688, 35.5804, 47.0612, 55.4525, 62.0698, 216.405, 216.414, 307.379,
438.351, 438.428, 465.823, 654.33, 654.351, 721.202, 721.23, 760.337, 892.756, 1092.03,
1113.22, 1113.25, 1167.59, 1192.71, 1236.91, 1337.26, 1357.25, 1357.27, 1469.99,
1523.34, 1604.69, 1604.73, 1790.55, 1812.84, 1824.11, 1824.15, 1985.25, 2098.58,
2132.99, 2133.02, 2171.75, 2224.39, 2224.41, 2236., 2308.77, 2555.42, 2555.44, 2729.16}

częstotliwość przy -Pt
{12.0572, 32.5574, 35.5688, 35.5804, 47.0612, 55.4525, 62.0698, 216.405, 216.414, 307.379,
438.351, 438.428, 465.823, 654.33, 654.351, 721.202, 721.23, 760.337, 892.756, 1092.03,
1113.22, 1113.25, 1167.59, 1192.71, 1236.91, 1337.26, 1357.25, 1357.27, 1469.99,
1523.34, 1604.69, 1604.73, 1790.55, 1812.84, 1824.11, 1824.15, 1985.25, 2098.58,
2132.99, 2133.02, 2171.75, 2224.39, 2224.41, 2236., 2308.77, 2555.42, 2555.44, 2729.16}

-2.5

częstotliwość przy +Pt
{12.0804, 32.6183, 35.5595, 35.5733, 47.1937, 55.5482, 62.1894, 216.396, 216.406, 307.38,
438.343, 438.428, 465.837, 654.331, 654.355, 721.206, 721.237, 760.348, 892.756,
1092.04, 1113.23, 1113.26, 1167.6, 1192.72, 1236.91, 1337.27, 1357.26, 1357.28, 1470.,
1523.34, 1604.7, 1604.74, 1790.55, 1812.84, 1824.11, 1824.16, 1985.26, 2098.59,
2133., 2133.03, 2171.75, 2224.39, 2224.42, 2236., 2308.76, 2555.42, 2555.44, 2729.16}

częstotliwość przy -Pt
{12.0373, 32.5053, 35.5783, 35.5877, 46.9404, 55.3709, 61.9679, 216.414, 216.422, 307.378,
438.361, 438.428, 465.811, 654.33, 654.349, 721.199, 721.223, 760.328, 892.756, 1092.03,
1113.22, 1113.25, 1167.57, 1192.7, 1236.91, 1337.26, 1357.24, 1357.26, 1469.99,
1523.34, 1604.69, 1604.72, 1790.54, 1812.83, 1824.11, 1824.15, 1985.25, 2098.58,
2132.99, 2133.02, 2171.74, 2224.39, 2224.41, 2236., 2308.77, 2555.42, 2555.44, 2729.17}

-5.

częstotliwość przy +Pt
{12.1067, 32.6872, 35.5501, 35.5666, 47.3369, 55.6568, 62.3254, 216.388, 216.399, 307.381, 438.334, 438.429, 465.853, 654.332, 654.359, 721.211, 721.245, 760.359, 892.756, 1092.04, 1113.23, 1113.26, 1167.62, 1192.73, 1236.91, 1337.27, 1357.26, 1357.29, 1470., 1523.35, 1604.71, 1604.75, 1790.55, 1812.84, 1824.12, 1824.17, 1985.26, 2098.59, 2133., 2133.03, 2171.75, 2224.4, 2224.42, 2236., 2308.76, 2555.42, 2555.45, 2729.16}

częstotliwość przy −Pt
{12.021, 32.4624, 35.5877, 35.5953, 46.8318, 55.304, 61.8844, 216.423, 216.43, 307.378, 438.37, 438.428, 465.8, 654.331, 654.347, 721.197, 721.217, 760.32, 892.756, 1092.02, 1113.22, 1113.24, 1167.56, 1192.69, 1236.91, 1337.25, 1357.24, 1357.25, 1469.98, 1523.33, 1604.68, 1604.71, 1790.54, 1812.83, 1824.1, 1824.14, 1985.24, 2098.57, 2132.99, 2133.01, 2171.74, 2224.39, 2224.41, 2236., 2308.77, 2555.42, 2555.43, 2729.17}

−7.5

częstotliwość przy +Pt
{12.136, 32.7638, 35.5408, 35.5601, 47.4904, 55.7779, 62.4771, 216.38, 216.392, 307.382, 438.327, 438.43, 465.87, 654.335, 654.365, 721.216, 721.253, 760.372, 892.756, 1092.05, 1113.23, 1113.27, 1167.63, 1192.75, 1236.91, 1337.28, 1357.27, 1357.3, 1470.01, 1523.36, 1604.72, 1604.76, 1790.55, 1812.85, 1824.12, 1824.18, 1985.27, 2098.59, 2133., 2133.04, 2171.75, 2224.4, 2224.43, 2236., 2308.76, 2555.43, 2555.45, 2729.16}

częstotliwość przy −Pt
{12.0081, 32.4289, 35.5971, 35.6031, 46.7358, 55.2523, 61.8196, 216.432, 216.438, 307.378, 438.381, 438.429, 465.79, 654.333, 654.347, 721.195, 721.212, 760.313, 892.756, 1092.02, 1113.22, 1113.24, 1167.55, 1192.68, 1236.91, 1337.25, 1357.23, 1357.25, 1469.98, 1523.33, 1604.68, 1604.7, 1790.54, 1812.83, 1824.1, 1824.13, 1985.24, 2098.57, 2132.99, 2133.01, 2171.74, 2224.39, 2224.4, 2236., 2308.77, 2555.42, 2555.43, 2729.17}

mnożnik 100

wyniki {0.}

iteracja 1

q={0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.}

sily w pretach {33.3333, 33.3333, 33.3333, 33.3333, −100., −100., −100., −100., 74.5356, 74.5356, 74.5356, 74.5356, 94.2809, 94.2809, 94.2809, 94.2809, −100., −100., −100., −100., 74.5356, 74.5356, 74.5356, 74.5356, 66.6667, 66.6667, 66.6667, 66.6667, −100., −100., −100., −100., 74.5356, 74.5356, 74.5356, 74.5356, 94.2809, 94.2809, 94.2809, 94.2809, −100., −100., −100., −100., 74.5356, 74.5356, 74.5356, 74.5356, 33.3333, 33.3333, 33.3333, 33.3333}

spr {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}

częstotliwości drgan własnych
{5.72058, 15.4511, 17.8188, 17.8188, 22.405, 26.3307, 29.4579, 108.222, 108.222, 153.678, 219.181, 219.181, 232.768, 327.104, 327.104, 360.549, 360.549, 380.046, 446.367, 545.961, 556.563, 556.563, 583.641, 596.212, 618.426, 668.569, 678.534, 678.534, 734.94, 761.61, 802.266, 802.266, 895.234, 906.384, 911.984, 911.984, 992.564, 1049.24, 1066.46, 1066.46, 1085.85, 1112.16, 1112.16, 1117.99, 1154.38, 1277.69, 1277.69, 1364.58}

mnożnik 100, step 0.

{33.3333, 33.3333, 33.3333, 33.3333, −100., −100., −100., −100., 74.5356, 74.5356, 74.5356, 74.5356, 94.2809, 94.2809, 94.2809, 94.2809, −100., −100., −100., −100., 74.5356, 74.5356, 74.5356, 74.5356, 66.6667, 66.6667, 66.6667, 66.6667, −100., −100., −100., −100., 74.5356, 74.5356, 74.5356, 74.5356, 94.2809, 94.2809, 94.2809, 94.2809, −100., −100., −100., −100., 74.5356, 74.5356, 74.5356, 74.5356, 33.3333, 33.3333, 33.3333, 33.3333} mnożnik 100, step 0.5

{33.3333, 33.3333, 33.3333, 33.3333, -98.0416, -101.739, -104.763, -100.848, 77.4721, 65.2688, 80.0133, 73.8043, 95.478, 95.3533, 95.4129, 95.3574, -100.633, -104.326, -97.6056, -101.518, 72.973, 72.1438, 69.9483, 80.5165, 68.0706, 67.8898, 68.0928, 67.9252, -98.9813, -102.729, -103.21, -99.3815, 71.0779, 71.2151, 73.7653, 79.6851, 95.3241, 95.6945, 95.2387, 95.6677, -99.2489, -103.045, -99.8657, -103.698, 77.092, 68.5768, 74.2427, 76.988, 34.5969, 33.676, 33.3197, 34.967}

mnożnik 100, step 1.

{33.3333, 33.3333, 33.3333, 33.3333, -97.2787, -104.59, -110.863, -102.673, 81.3262, 56.8617, 85.9154, 74.2883, 97.7989, 97.4335, 97.537, 97.4409, -102.254, -109.55, -96.1351, -104.317, 72.5337, 70.3629, 66.0012, 87.1443, 70.1783, 69.7894, 70.2704, 69.9317, -99.0469, -106.567, -107.636, -99.7886, 68.5939, 68.5357, 73.7755, 85.7143, 97.7494, 98.4503, 97.3985, 98.3388, -100.102, -107.818, -101.253, -109.113, 80.8961, 63.8023, 75.0673, 80.7508, 36.4529, 34.5316, 33.8297, 37.2096}

mnożnik 100

wyniki $\{-2.39425\times10^{-2}\}$

iteracja 166

q={0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., -0.00924537, 0.0000668006, -0.00468107, -0.00025721, -0.00903575, -0.00435263, 0.00928828, 0.000377335, -0.00503498, 0.000297838, 0.00947825, -0.00466633, -0.019378, 0.0191721, -0.0100335, -0.0199677, -0.0166313, -0.00814185, 0.0186402, -0.0173314, -0.0100859, 0.019227, 0.018476, -0.00947548, -0.0287786, 0.00532489, -0.0126255, 0.000976653, -0.0262714, -0.0147773, 0.0268524, -0.00161144, -0.0136414, -0.00290091, 0.0299769, -0.015759, -0.0325139, 0.0465046, -0.0152309, -0.03605, -0.0378651, -0.0212299, 0.0285779, -0.0399555, -0.0152319, 0.0321753, 0.0444309, -0.0239425}

sily w pretach {33.3333, 33.3333, 33.3333, 33.3333, -97.2787, -104.59, -110.863, -102.673, 81.3262, 56.8617, 85.9154, 74.2883, 97.7989, 97.4335, 97.537, 97.4409, -102.254, -109.55, -96.1351, -104.317, 72.5337, 70.3629, 66.0012, 87.1443, 70.1783, 69.7894, 70.2704, 69.9317, -99.0469, -106.567, -107.636, -99.7886, 68.5939, 68.5357, 73.7755, 85.7143, 97.7494, 98.4503, 97.3985, 98.3388, -100.102, -107.818, -101.253, -109.113, 80.8961, 63.8023, 75.0673, 80.7508, 36.4529, 34.5316, 33.8297, 37.2096}

spr {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -10.}

częstotliwości drgan wymuszonych

{5.76235, 15.5618, 17.7806, 17.7859, 22.7591, 26.4988, 29.6682, 108.183, 108.188, 153.679, 219.137, 219.177, 232.802, 327.093, 327.104, 360.554, 360.569, 380.07, 446.365, 545.973, 556.565, 556.58, 583.675, 596.238, 618.424, 668.581, 678.548, 678.558, 734.949, 761.618, 802.277, 802.294, 895.237, 906.395, 911.988, 912.012, 992.575, 1049.25, 1066.47, 1066.48, 1085.86, 1112.16, 1112.18, 1117.99, 1154.37, 1277.69, 1277.7, 1364.57}

0.

częstotliwość przy +Pt

{11.5246, 31.1233, 35.5612, 35.5718, 45.518, 52.9971, 59.336, 216.367, 216.376, 307.357, 438.274, 438.354, 465.604, 654.186, 654.207, 721.108, 721.137, 760.139, 892.731, 1091.95, 1113.13, 1113.16, 1167.35, 1192.48, 1236.85, 1337.16, 1357.1, 1357.12, 1469.9, 1523.24, 1604.55, 1604.59, 1790.47, 1812.79, 1823.98, 1824.02, 1985.15, 2098.5, 2132.93, 2132.96, 2171.71, 2224.33, 2224.35, 2235.98, 2308.74, 2555.38, 2555.4, 2729.15}

```
częstotliwość przy -Pt
 {11.5246, 31.1233, 35.5612, 35.5718, 45.518, 52.9971, 59.336, 216.367, 216.376, 307.357,
  438.274, 438.354, 465.604, 654.186, 654.207, 721.108, 721.137, 760.139, 892.731,
  1091.95, 1113.13, 1113.16, 1167.35, 1192.48, 1236.85, 1337.16, 1357.1, 1357.12, 1469.9,
  1523.24, 1604.55, 1604.59, 1790.47, 1812.79, 1823.98, 1824.02, 1985.15, 2098.5, 2132.93,
  2132.96, 2171.71, 2224.33, 2224.35, 2235.98, 2308.74, 2555.38, 2555.4, 2729.15}
-2.5
częstotliwość przy +Pt
 {11.5544, 31.2032, 35.5518, 35.5643, 45.674, 53.1222, 59.4914, 216.358, 216.369, 307.358,
  438.266, 438.356, 465.62, 654.188, 654.212, 721.112, 721.145, 760.152, 892.731, 1091.95,
  1113.13, 1113.17, 1167.37, 1192.49, 1236.85, 1337.17, 1357.1, 1357.13, 1469.9, 1523.24,
  1604.56, 1604.6, 1790.48, 1812.79, 1823.98, 1824.04, 1985.16, 2098.51, 2132.93,
  2132.97, 2171.71, 2224.33, 2224.36, 2235.98, 2308.74, 2555.38, 2555.4, 2729.15}
częstotliwość przy -Pt
 {11.4987, 31.0539, 35.5706, 35.5795, 45.3753, 52.8888, 59.2015, 216.375, 216.383, 307.356,
  438.283, 438.354, 465.589, 654.184, 654.203, 721.103, 721.13, 760.128, 892.73, 1091.94,
  1113.13, 1113.15, 1167.33, 1192.46, 1236.85, 1337.16, 1357.09, 1357.11, 1469.89,
  1523.23, 1604.55, 1604.58, 1790.47, 1812.79, 1823.97, 1824.01, 1985.14, 2098.5, 2132.93,
  2132.96, 2171.71, 2224.33, 2224.35, 2235.98, 2308.74, 2555.38, 2555.4, 2729.15}
-5.
częstotliwość przy +Pt
 {11.5878, 31.2925, 35.5424, 35.557, 45.8422, 53.2621, 59.6657, 216.35, 216.362, 307.359,
  438.258, 438.357, 465.638, 654.191, 654.218, 721.118, 721.154, 760.166, 892.731,
  1091.96, 1113.14, 1113.17, 1167.39, 1192.5, 1236.85, 1337.18, 1357.11, 1357.14, 1469.91,
  1523.25, 1604.57, 1604.61, 1790.48, 1812.8, 1823.99, 1824.05, 1985.16, 2098.51, 2132.94,
  2132.97, 2171.72, 2224.33, 2224.36, 2235.98, 2308.74, 2555.38, 2555.41, 2729.15}
częstotliwość przy -Pt
 {11.4771, 30.9957, 35.58, 35.5874, 45.247, 52.7983, 59.0892, 216.384, 216.391, 307.356,
  438.292, 438.353, 465.576, 654.184, 654.2, 721.1, 721.123, 760.118, 892.73, 1091.94,
  1113.12, 1113.15, 1167.32, 1192.45, 1236.85, 1337.15, 1357.08, 1357.1, 1469.89, 1523.23,
  1604.54, 1604.57, 1790.47, 1812.78, 1823.97, 1824.01, 1985.14, 2098.5, 2132.93,
  2132.95, 2171.71, 2224.32, 2224.34, 2235.98, 2308.74, 2555.38, 2555.39, 2729.15}
-7.5
częstotliwość przy +Pt
 {11.6246, 31.3907, 35.5331, 35.5499, 46.0217, 53.4162, 59.8581, 216.343, 216.355, 307.361,
  438.251, 438.359, 465.658, 654.196, 654.225, 721.124, 721.163, 760.181, 892.732, 1091.96,
  1113.14, 1113.18, 1167.41, 1192.52, 1236.85, 1337.18, 1357.13, 1357.15, 1469.92,
  1523.26, 1604.58, 1604.63, 1790.48, 1812.8, 1824., 1824.06, 1985.17, 2098.52, 2132.94,
  2132.98, 2171.72, 2224.34, 2224.37, 2235.98, 2308.74, 2555.39, 2555.41, 2729.15}
częstotliwość przy -Pt
 {11.4597, 30.9491, 35.5895, 35.5954, 45.1337, 52.7261, 58.9997, 216.393, 216.399, 307.355,
  438.302, 438.354, 465.565, 654.185, 654.199, 721.098, 721.117, 760.11, 892.731, 1091.93,
  1113.12, 1113.14, 1167.31, 1192.44, 1236.85, 1337.15, 1357.08, 1357.09, 1469.88,
  1523.22, 1604.54, 1604.56, 1790.47, 1812.78, 1823.97, 1824., 1985.14, 2098.49, 2132.93,
  2132.95, 2171.7, 2224.32, 2224.34, 2235.98, 2308.74, 2555.38, 2555.39, 2729.15}
```

```
In[385]:= qwybr = 6;
mMian = mGPS = mSC = mSZ = mWC = mWZ = muu = Table[0, {Length[msnei]}];
mq11 = mq22 = mq33 = mqq11 = mqq22 = mqq33 = Table[0, {Length[msnei]}];
qx = qy = qz = Table[0, {Length[msnei]}, {Length[qq[[1]]] / 3}];
qmax = qmax2 = Table[0, {Length[msnei]}, {6}];
(*sily w pretach*)
```

```
Do[
 msne = msnei[[ii]];
 Print["mnoznik ", msne];
 uu = mSwP[[ii]] + wy0 * msne;
 muu[[ii]] = uu;
 Print["siły w prętach ", uu];
 (*mianownik GPS*)
 q = qq[[ii]];
 Do[
  qx[[ii, iii]] = q[[3 * iii - 2]];
  qy[[ii, iii]] = q[[3 * iii - 1]];
  qz[[ii, iii]] = q[[3 * iii]],
  {iii, Length[q] / 3}];
 qmax[[ii, 1]] = 1000 * Max[qx[[ii, All]]];
 qmax[[ii, 2]] = 1000 * Min[qx[[ii, All]]];
 qmax[[ii, 3]] = 1000 * Max[qy[[ii, All]]];
 qmax[[ii, 4]] = 1000 * Min[qy[[ii, All]]];
 qmax[[ii, 5]] = 1000 * Max[qz[[ii, All]]];
 qmax[[ii, 6]] = 1000 * Min[qz[[ii, All]]];
 qmax2[[ii, 1]] = Flatten[1000 * qq2[[ii, 3 * Ordering[qx[[ii, All]], -1] - 2]]];
 qmax2[[ii, 2]] = Flatten[1000 * qq2[[ii, 3 * Ordering[qx[[ii, All]], 1] - 2]]];
 qmax2[[ii, 3]] = Flatten[1000 * qq2[[ii, 3 * Ordering[qy[[ii, All]], -1] - 1]]];
 qmax2[[ii, 4]] = Flatten[1000 * qq2[[ii, 3 * Ordering[qy[[ii, All]], 1] - 1]]];
 qmax2[[ii, 5]] = Flatten[1000 * qq2[[ii, 3 * Ordering[qz[[ii, All]], -1]]]];
 qmax2[[ii, 6]] = Flatten[1000 * qq2[[ii, 3 * Ordering[qz[[ii, All]], 1]]]];
 Print["maksymalne przemieszczenie x ",
  1000 * Max[qx[[ii, All]]], ", i = ", Flatten[Ordering[qx[[ii, All]], -1]]];
 Print["minimalne przemieszczenie x ", 1000 * Min[qx[[ii, All]]],
  ", i = ", Flatten[Ordering[qx[[ii, All]], 1]]];
 Print["maksymalne przemieszczenie y ", 1000 * Max[qy[[ii, All]]],
  ", i = ", Flatten[Ordering[qy[[ii, All]], -1]]];
 Print["minimalne przemieszczenie y ", 1000 * Min[qy[[ii, All]]],
  ", i = ", Flatten[Ordering[qy[[ii, All]], 1]]];
 Print["maksymalne przemieszczenie z ", 1000 * Max[qz[[ii, All]]],
  ", i = ", Flatten[Ordering[qz[[ii, All]], -1]]];
 Print["minimalne przemieszczenie z ", 1000 * Min[qz[[ii, All]]],
  ", i = ", Flatten[Ordering[qz[[ii, All]], 1]]];
 mian = qq[[ii]].MK[qq[[ii]], p1, p2, x, y, z, e, a, sne,
    msnei[[ii]], le, loss, toss, lgss].qq[[ii]];
 mMian[[ii]] = mian;
 Print["mianownik GPS ", mian];
 mGPS[[ii]] = qq[[1]].MK[qq[[1]], p1, p2, x, y,
     z, e, a, sne, msnei[[1]], le, loss, toss, lgss].qq[[1]] / mian;
 Print["GPS ", mGPS[[ii]]];

 mqq11[[ii]] = qq2[[ii]][[3 * qwybr - 2]] * 1000;
 mqq22[[ii]] = qq2[[ii]][[3 * qwybr - 1]] * 1000;
 mqq33[[ii]] = qq2[[ii]][[3 * qwybr]] * 1000;
 Print["wybrane przemieszczenia II rzędu ", mqq11[[ii]], " ",
  mqq22[[ii]], " ",
  mqq33[[ii]]];

 mq11[[ii]] = q[[3 * qwybr - 2]] * 1000;
 mq22[[ii]] = q[[3 * qwybr - 1]] * 1000;
 mq33[[ii]] = q[[3 * qwybr]] * 1000;
```

```
 Print["wybrane przemieszczenia III rzędu ", mq11[[ii]], " ",
  mq22[[ii]], " ",
  mq33[[ii]]];

 mSC[[ii]] = SetAccuracy[Max[uu], 2];
 Print["maksymalna sila w ciegnach ",
  mSC[[ii]]];
 Print[Ordering[uu, 1]];
 mSZ[[ii]] = SetAccuracy[Min[uu], 2];
 Print["minimalna sila w zastrzalach ",
  mSZ[[ii]]];
 Print[Ordering[uu, -1]];
 mWC[[ii]] = SetAccuracy[Max[uu] / 110.2, 4];
 Print["wytęzenie ciegien ",
  mWC[[ii]]];

 mWZ[[ii]] = SetAccuracy[Min[uu] / -203.5, 4];
 Print["wytęzenie zastrzałow ",
  mWZ[[ii]]];
 Print["  "],
 {ii, Length[msnei]}]

w1 = Join[{{"qx3", "-qx3", "qy3", "-qy3", "qz3", "-qz3"}}, qmax];
w2 =
  Join[{{"qx2", "-qx2", "qy2", "-qy2", "qz2", "-qz2"}}, Flatten[qmax2, {{1}, {2, 3}}]];
w = Table[0, {Length[msnei] + 1}, {12}];
Do[Do[w[[j]][[2 i - 1]] = w2[[j, i]];
   w[[j]][[2 i]] = w1[[j, i]], {i, 6}], {j, Length[msnei] + 1}];

x1 = x2 = y1 = y2 = Table[0, {Length[Pt]}];
Pola = lambda = Table[0, {Length[msnei]}];
nn = 7;
Do[
  Do[
   Do[
    y1[[i]] = mOmega2[[m, i, n]];
    y2[[i]] = mOmega3[[m, Length[Pt] + 1 - i, n]];
    y = Join[y1, y2[[1 ;; Length[Pt] - 1]]];
    x1[[i]] = Pt[[i]];
    x2[[i]] = Pt[[Length[Pt] + 1 - i]];
    x = Join[x1, x2[[1 ;; Length[Pt] - 1]]],
    {i, 1, Length[Pt]}];
   area = 0;
Do[
If[i < 2 * Length[Pt] - 1,
(pointX1 = x[[i]];
pointY1 = y[[i]];
pointX2 = x[[i + 1]];
pointY2 = y[[i + 1]]),
(pointX1 = x[[i]];
pointY1 = y[[i]];
pointX2 = x[[1]];
pointY2 = y[[1]])
];
```

```
area += pointX1 * pointY2 - pointX2 * pointY1;
, {i, 1, 2 * Length[Pt] - 1}];
   Pola[[m]] = Abs[area / 2]
   , {m, 1, Length[msnei]}];

  Do[lambda[[o]] = Pola[[o]] / Max[Pola]
   , {o, 1, Length[lambda]}];

  par1 = Join[{-Pt}, mOmega2[[All, All, n]]];
  par2 = Join[{Pt}, mOmega3[[All, All, n]]];
  par = Table[0, {Length[msnei] + 1}, {Length[Pt] * 2}];
  Do[Do[par[[j]][[i]] = par1[[j, i]];
    par[[j]][[i + Length[Pt]]] = par2[[j, i]], {i, Length[Pt]}],
   {j, Length[msnei] + 1}];
  str = "C:\\Users\\Justyna\\Desktop\\mathematica\\dynamika\\wieża
      MQW2\\wyniki rezonans parametryczny" <> ToString[n] <> ".xlsx";
  Export[str, {Transpose[Join[List /@ Join[List /@ {ss}, msnei], par, 2]],
    Prepend[{Pola, lambda}, msnei]}]
  , {n, 1, nn}];
(****************************************************)
Export["C:\\Users\\Justyna\\Desktop\\mathematica\\dynamika\\wieża MQW2\\wyniki.xlsx",
  {"statyka 1" → Prepend[
     Transpose[{msnei, mqq11, mq11, mqq22, mq22, mqq33, mq33, mWC, mWZ, mGPS, mMian}],
     {"ss", "wybrany węzeł x - II", "wybrany węzeł x - III", "wybrany węzeł y - II",
      "wybrany węzeł y - III", "wybrany węzeł z - II", "wybrany węzeł z - III",
      "wytężenie cięgna", "wytężenie zastrzały", "GPS", "mianownik"}],
   "statyka 2" → Join[List /@ Join[List /@ {ss}, msnei], w, 2], "N(P+S)" → Transpose[
     Join[List /@ Join[List /@ {ss}, msnei], Join[{Range[1, le]}, muu], 2]], "N(P)" →
    Transpose[Join[List /@ Join[List /@ {ss}, msnei], Join[{Range[1, le]}, mSwP], 2]],
   "częstotliwości drgań własnych" → Join[List /@ Join[List /@ {ss}, msnei],
     Join[{Range[1, Length[mOmega0[[1]]]]}, mOmega0], 2],
   "częstotliwości drgań wymuszonych" → Join[List /@ Join[List /@ {ss}, msnei],
     Join[{Range[1, Length[mOmega[[1]]]]}, mOmega], 2]}];
```

```
mnoznik 110

siły w prętach {36.6667, 36.6667, 36.6667, 36.6667, -107.119, -114.448, -120.201,
  -112.072, 87.8334, 64.6654, 92.5102, 82.0342, 106.859, 106.518, 106.621, 106.527,
  -111.683, -118.998, -106.033, -114.153, 79.9611, 77.2873, 73.5121, 94.0654, 76.6088,
  76.2201, 76.6921, 76.3507, -108.63, -116.145, -117.296, -109.484, 75.833, 75.6574,
  81.0477, 92.7941, 106.738, 107.462, 106.418, 107.359, -109.621, -117.319, -110.735,
  -118.559, 87.9331, 70.911, 82.1288, 87.8349, 39.6138, 37.6951, 37.0025, 40.3556}

maksymalne przemieszczenie x 28.9674, i = {20}

minimalne przemieszczenie x -32.8745, i = {18}

maksymalne przemieszczenie y 42.7268, i = {17}

minimalne przemieszczenie y -36.2209, i = {19}

maksymalne przemieszczenie z 0., i = {4}

minimalne przemieszczenie z -22.0405, i = {20}

mianownik GPS 0.220462

GPS 1.

wybrane przemieszczenia II rzędu -0.189765 -8.30599 -3.96917
```

wybrane przemieszczenia III rzędu -0.231584 -8.23365 -3.95928

maksymalna sila w ciegnach 107.5

{7}

minimalna sila w zastrzalach -120.2

{38}

wytęzenie ciegien 0.975

wytęzenie zastrzałow 0.591

mnoznik 100

siły w prętach {33.3333, 33.3333, 33.3333, 33.3333, -97.2787, -104.59, -110.863, -102.673, 81.3262, 56.8617, 85.9154, 74.2883, 97.7989, 97.4335, 97.537, 97.4409, -102.254, -109.55, -96.1351, -104.317, 72.5337, 70.3629, 66.0012, 87.1443, 70.1783, 69.7894, 70.2704, 69.9317, -99.0469, -106.567, -107.636, -99.7886, 68.5939, 68.5357, 73.7755, 85.7143, 97.7494, 98.4503, 97.3985, 98.3388, -100.102, -107.818, -101.253, -109.113, 80.8961, 63.8023, 75.0673, 80.7508, 36.4529, 34.5316, 33.8297, 37.2096}

maksymalne przemieszczenie x 32.1753, i = {20}

minimalne przemieszczenie x -36.05, i = {18}

maksymalne przemieszczenie y 46.5046, i = {17}

minimalne przemieszczenie y -39.9555, i = {19}

maksymalne przemieszczenie z 0., i = {4}

minimalne przemieszczenie z -23.9425, i = {20}

mianownik GPS 0.239496

GPS 0.920523

wybrane przemieszczenia II rzędu -0.206109 -9.15818 -4.38263

wybrane przemieszczenia III rzędu -0.25721 -9.03575 -4.35263

maksymalna sila w ciegnach 98.5

{7}

minimalna sila w zastrzalach -110.9

{38}

wytęzenie ciegien 0.893

wytęzenie zastrzałow 0.545

```
In[∘]:= ClearAll["Global`*"]
EAz = 6.88 * 10^(-4) * 210000000;
EAc = 3.14159 * 10^(-4) * 210000000;
SS = 60;
(*Dane*)
str = OpenRead["c:/doktorat/płyta_Quartex_kontynualny.txt"];
lw = Read[str, Number];
xk = yk = zk = Table[0, {lw}];
K = Table[0, {3 * lw}, {3 * lw}];
Do[xk[[k]] = Read[str, Number], {k, lw}];
Do[yk[[k]] = Read[str, Number], {k, lw}];
Do[zk[[k]] = Read[str, Number], {k, lw}];
Do[Do[K[[k, l]] = Read[str], {k, 3 * lw}], {l, 3 * lw}];
Close[str];
ϵ0 = {u0, v0, w0, r, p, q, ϵx, ϵy, ϵz, γxy, γxz, γyz, ϵxx, ϵxy, ϵxz, ϵyx, ϵzx, ϵyy, ϵyz,
   ϵzy, ϵzz, γxyx, γxzx, γxyz, γyzx, γxzy, γxyy, γyzy, γxzz, γyzz, ϵxxx, ϵxxy, ϵxxz, ϵyxx,
   ϵxyz, ϵzxx, ϵyxy, ϵyyy, ϵyyz, ϵxyy, ϵyxz, ϵzyy, ϵzxz, ϵzyz, ϵzzz, ϵxzz, ϵzxy, ϵyzz,
   γxyxx, γxzxx, γxyxz, γxzxy, γxyyy, γyzyy, γxyyz, γyzxy, γxzzz, γyzzz, γyzxz, γxzyz};
(*Transformacja trzecia - odkształcenia, które chcę zachować,
ustawiam na poczatkowych pozycjach*)
ϵ = {ϵx, ϵy, γxy, γxz, γyz, u0, v0, w0, r, p, q, ϵz, ϵxx, ϵxy, ϵxz, ϵyx, ϵzx, ϵyy, ϵyz, ϵzy,
   ϵzz, γxyx, γxzx, γxyz, γyzx, γxzy, γxyy, γyzy, γxzz, γyzz, ϵxxx, ϵxxy, ϵxxz, ϵyxx,
   ϵxyz, ϵzxx, ϵyxy, ϵyyy, ϵyyz, ϵxyy, ϵyxz, ϵzyy, ϵzxz, ϵzyz, ϵzzz, ϵxzz, ϵzxy, ϵyzz,
   γxyxx, γxzxx, γxyxz, γxzxy, γxyyy, γyzyy, γxyyz, γyzxy, γxzzz, γyzzz, γyzxz, γxzyz};

(*Transformacja pierwsza - przejście z współrzędnych węzłów modelu dyskretnego
  na odkształcenia modelu kontynualnego*)
u[x_, y_, z_] = u0 + (ϵx) * x + (2 * γxy / 2 - r) * y + (2 * γxz / 2 + q) * z +
   ϵxx / 2 * x^2 + ϵxy * x * y + ϵxz * x * z + ((2 * γxyy - ϵyx) / 2) * y^2 +
   (2 * (γxyz - γyzx + γxzy) / 2) * y * z + ((2 * γxzz - ϵzx) / 2) * z^2 + (ϵxxx / 6) * x^3 +
   (ϵxxy / 2) * x^2 * y + (ϵxxz / 2) * x^2 * z + ((2 * γxyyy - ϵyxy) / 6) * y^3 +
   (ϵxyy / 2) * y^2 * x + ((2 * γxyyz - ϵyxz) / 2) * y^2 * z + ((2 * γxzzz - ϵzxz) / 6) * z^3 +
   (ϵxzz / 2) * z^2 * x + ((2 * γxzyz - ϵzxy) / 2) * z^2 * y + ϵxyz * x * y * z;
v[x_, y_, z_] = v0 + (2 * γxy / 2 + r) * x + (ϵy) * y + (2 * γyz / 2 - p) * z +
   ((2 * γxyx - ϵxy) / 2) * x^2 + (ϵyx) * x * y + (2 * (γxyz + γyzx - γxzy) / 2) * x * z +
   (ϵyy / 2) * y^2 + (ϵyz) * y * z + ((2 * γyzz - ϵzy) / 2) * z^2 + ((2 * γxyxx - ϵxxy) / 6) * x^3 +
   (ϵyxx / 2) * x^2 * y + ((2 * γxyxz - ϵxyz) / 2) * x^2 * z + (ϵyyy / 6) * y^3 +
   (ϵyxy / 2) * y^2 * x + (ϵyyz / 2) * y^2 * z + ((2 * γyzzz - ϵzyz) / 6) * z^3 +
   ((2 * γyzxz - ϵzxy) / 2) * z^2 * x + (ϵyzz / 2) * z^2 * y + ϵyxz * x * y * z;
w[x_, y_, z_] = w0 + (2 * γxz / 2 - q) * x + (2 * γyz / 2 + p) * y + (ϵz) * z +
   ((2 * γxzx - ϵxz) / 2) * x^2 + (2 * (-γxyz + γyzx + γxzy) / 2) * x * y +
   (ϵzx) * x * z + ((2 * γyzy - ϵyz) / 2) * y^2 + (ϵzy) * y * z + (ϵzz / 2) * z^2 +
   ((2 * γxzxx - ϵxxz) / 6) * x^3 + ((2 * γxzxy - ϵxyz) / 2) * x^2 * y + (ϵzxx / 2) * x^2 * z +
   ((2 * γyzyy - ϵyyz) / 6) * y^3 + ((2 * γyzxy - ϵyxz) / 2) * y^2 * x + (ϵzyy / 2) * y^2 * z +
   (ϵzzz / 6) * z^3 + (ϵzxz / 2) * z^2 * x + (ϵzyz / 2) * z^2 * y + ϵzxy * x * y * z;
T1 = T2 = T3 = Table[0, {Length[ϵ]}];
Do[T1[[i]] = Coefficient[u[x, y, z], ϵ[[i]]];
  T2[[i]] = Coefficient[v[x, y, z], ϵ[[i]]];
  T3[[i]] = Coefficient[w[x, y, z], ϵ[[i]]], {i, 1, Length[ϵ]}];
Tk[x_, y_, z_] = {T1, T2, T3};
T = Table[0, {3 * Length[xk]}];
Do[T[[3 i - 2]] = Tk[xk[[i]], yk[[i]], zk[[i]]][[1]];
  T[[3 i - 1]] = Tk[xk[[i]], yk[[i]], zk[[i]]][[2]];
```

```
  T[[3 i]] = Tk[xk[[i]], yk[[i]], zk[[i]]][[3]], {i, 1, Length[xk]}];
T // MatrixForm;

(*Transformacja druga - redukcja ilości odkształceń i gradientów odkształceń*)
Dimensions[T]
MatrixRank[T]
TT = Join[T[[All, 1 ;; 5]], T[[All, 12 ;; 20]], T[[All, 22 ;; 28]],
   T[[All, 31 ;; 42]], T[[All, 47 ;; 47]], T[[All, 49 ;; 56]], 2];

Dimensions[TT]
L = MatrixRank[TT]
S = Transpose[TT].K.TT // Chop;
Dimensions[S]

(*Transformacja czwarta - static condensation*)
(*Guyan reduction, also known as static condensation,
is a dimensionality reduction method which reduces the number of degrees of freedom
 by ignoring the inertial terms of the equilibrium equations and expressing
 the unloaded degrees of freedom in terms of the loaded degrees of freedom.*)
S11 = S[[1 ;; 5, 1 ;; 5]];
Chop[%, 10^-4] // MatrixForm
S12 =  S[[1 ;; 5, 6 ;; L]];
S22 = S[[6 ;; L, 6 ;; L]];
S21 = S[[6 ;; L, 1 ;; 5]];
KK = S11 - S12.Inverse[S22].S21;
Chop[%, 10^-5] // MatrixForm

d11 = S11[[1, 1]];
d12 = S11[[1, 2]];
d22 = S11[[2, 2]];
d44 = S11[[3, 3]];
d55 = S11[[4, 4]];
d66 = S11[[5, 5]];
```

Out[∘]= {63, 60}

Out[∘]= 48

Out[∘]= {63, 42}

Out[∘]= 42

Out[∘]= {42, 42}

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 964019. & 357836. & 0 & 0 & 0 \\ 357836. & 964019. & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.43135\times10^{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.9956\times10^{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.9956\times10^{6} \end{pmatrix}$$

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 73228.8 & 14390.9 & 0 & 0 & 0 \\ 14390.9 & 51448.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 177034. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12306.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 67408.7 \end{pmatrix}$$

In[∘]:=
```
(*Dane do płyty*)
pi = Pi;
```

```
a0 = 5 / 6;
a2 = 7 / 10;
a1 = 8 / 10;
a = 8;
b = 8;
h = 1;
p = 1.5;

(*ugięcie płyta*)
w[x_, y_] :=
 (16 a^2 b^2 p (-144 a^4 a0^2 b^4 d44 d55 - 12 a^2 a0 b^2 (a^2 (d22 d55 + d44 d66) + b^2 (d11 d44 + d55 d66))
        h^2 π^2 - (b^4 d11 d66 + a^4 d22 d66 - a^2 b^2 (d12^2 - d11 d22 + 2 d12 d66))
        h^4 π^4) Sin[(π x) / a] × Sin[(π y) / b]) /
   (a0 h^3 π^6 (12 a^2 a0 b^2 d44 d55 (b^4 d11 + a^4 d22 + 2 a^2 b^2 (d12 + 2 d66)) + (a^2 d44 + b^2 d55)
        (b^4 d11 d66 + a^4 d22 d66 - a^2 b^2 (d12^2 - d11 d22 + 2 d12 d66)) h^2 π^2)) + (16 a^2 b^2 p
     (-144 a^4 a0^2 b^4 d44 d55 - 12 a^2 a0 b^2 (a^2 (d22 d55 + d44 d66) + 9 b^2 (d11 d44 + d55 d66)) h^2 π^2 -
       (81 b^4 d11 d66 + a^4 d22 d66 - 9 a^2 b^2 (d12^2 - d11 d22 + 2 d12 d66)) h^4 π^4)
     Sin[(3 π x) / a] × Sin[(π y) / b]) /
   (3 a0 h^3 π^6 (12 a^2 a0 b^2 d44 d55 (81 b^4 d11 + a^4 d22 + 18 a^2 b^2 (d12 + 2 d66)) + (a^2 d44 + 9 b^2 d55)
        (81 b^4 d11 d66 + a^4 d22 d66 - 9 a^2 b^2 (d12^2 - d11 d22 + 2 d12 d66)) h^2 π^2)) + (16 a^2 b^2 p
     (-144 a^4 a0^2 b^4 d44 d55 - 12 a^2 a0 b^2 (a^2 (d22 d55 + d44 d66) + 25 b^2 (d11 d44 + d55 d66))
        h^2 π^2 - (625 b^4 d11 d66 + a^4 d22 d66 - 25 a^2 b^2 (d12^2 - d11 d22 + 2 d12 d66)) h^4 π^4)
     Sin[(5 π x) / a] × Sin[(π y) / b]) / (5 a0 h^3 π^6
     (12 a^2 a0 b^2 d44 d55 (625 b^4 d11 + a^4 d22 + 50 a^2 b^2 (d12 + 2 d66)) + (a^2 d44 + 25 b^2 d55)
        (625 b^4 d11 d66 + a^4 d22 d66 - 25 a^2 b^2 (d12^2 - d11 d22 + 2 d12 d66)) h^2 π^2)) + (16 a^2 b^2 p
     (-144 a^4 a0^2 b^4 d44 d55 - 12 a^2 a0 b^2 (a^2 (d22 d55 + d44 d66) + 49 b^2 (d11 d44 + d55 d66))
        h^2 π^2 - (2401 b^4 d11 d66 + a^4 d22 d66 - 49 a^2 b^2 (d12^2 - d11 d22 + 2 d12 d66)) h^4 π^4)
     Sin[(7 π x) / a] × Sin[(π y) / b]) / (7 a0 h^3 π^6
     (12 a^2 a0 b^2 d44 d55 (2401 b^4 d11 + a^4 d22 + 98 a^2 b^2 (d12 + 2 d66)) + (a^2 d44 + 49 b^2 d55)
        (2401 b^4 d11 d66 + a^4 d22 d66 - 49 a^2 b^2 (d12^2 - d11 d22 + 2 d12 d66)) h^2 π^2)) + (16 a^2 b^2 p
     (-144 a^4 a0^2 b^4 d44 d55 - 12 a^2 a0 b^2 (9 a^2 (d22 d55 + d44 d66) + b^2 (d11 d44 + d55 d66)) h^2 π^2 -
       (b^4 d11 d66 + 81 a^4 d22 d66 - 9 a^2 b^2 (d12^2 - d11 d22 + 2 d12 d66)) h^4 π^4)
     Sin[(π x) / a] × Sin[(3 π y) / b]) /
   (3 a0 h^3 π^6 (12 a^2 a0 b^2 d44 d55 (b^4 d11 + 81 a^4 d22 + 18 a^2 b^2 (d12 + 2 d66)) + (9 a^2 d44 + b^2 d55)
        (b^4 d11 d66 + 81 a^4 d22 d66 - 9 a^2 b^2 (d12^2 - d11 d22 + 2 d12 d66)) h^2 π^2)) +
  (16 a^2 b^2 p (-16 a^4 a0^2 b^4 d44 d55 - 12 a^2 a0 b^2 (a^2 (d22 d55 + d44 d66) + b^2 (d11 d44 + d55 d66))
        h^2 π^2 - 9 (b^4 d11 d66 + a^4 d22 d66 - a^2 b^2 (d12^2 - d11 d22 + 2 d12 d66)) h^4 π^4)
     Sin[(3 π x) / a] × Sin[(3 π y) / b]) / (243 a0 h^3 π^6
     (4 a^2 a0 b^2 d44 d55 (b^4 d11 + a^4 d22 + 2 a^2 b^2 (d12 + 2 d66)) +
       3 (a^2 d44 + b^2 d55) (b^4 d11 d66 + a^4 d22 d66 - a^2 b^2 (d12^2 - d11 d22 + 2 d12 d66)) h^2 π^2)) +
  (16 a^2 b^2 p (-625 b^4 d11 d66 h^4 π^4 - 9 a^4 (4 a0 b^2 d44 + 3 d22 h^2 π^2) (4 a0 b^2 d55 + 3 d66 h^2 π^2) +
       75 a^2 b^2 h^2 π^2 (-4 a0 b^2 (d11 d44 + d55 d66) + 3 (d12^2 - d11 d22 + 2 d12 d66) h^2 π^2))
     Sin[(5 π x) / a] × Sin[(3 π y) / b]) / (15 a0 h^3 π^6
     (12 a^2 a0 b^2 d44 d55 (625 b^4 d11 + 81 a^4 d22 + 450 a^2 b^2 (d12 + 2 d66)) + (9 a^2 d44 + 25 b^2 d55)
        (625 b^4 d11 d66 + 81 a^4 d22 d66 - 225 a^2 b^2 (d12^2 - d11 d22 + 2 d12 d66)) h^2 π^2)) +
  (16 a^2 b^2 p (-2401 b^4 d11 d66 h^4 π^4 - 9 a^4 (4 a0 b^2 d44 + 3 d22 h^2 π^2) (4 a0 b^2 d55 + 3 d66 h^2 π^2) +
       147 a^2 b^2 h^2 π^2 (-4 a0 b^2 (d11 d44 + d55 d66) + 3 (d12^2 - d11 d22 + 2 d12 d66) h^2 π^2))
     Sin[(7 π x) / a] × Sin[(3 π y) / b]) / (21 a0 h^3 π^6
     (12 a^2 a0 b^2 d44 d55 (2401 b^4 d11 + 81 a^4 d22 + 882 a^2 b^2 (d12 + 2 d66)) + (9 a^2 d44 + 49 b^2 d55)
        (2401 b^4 d11 d66 + 81 a^4 d22 d66 - 441 a^2 b^2 (d12^2 - d11 d22 + 2 d12 d66)) h^2 π^2)) + (16 a^2
     b^2 p (-144 a^4 a0^2 b^4 d44 d55 - 12 a^2 a0 b^2 (25 a^2 (d22 d55 + d44 d66) + b^2 (d11 d44 + d55 d66))
```

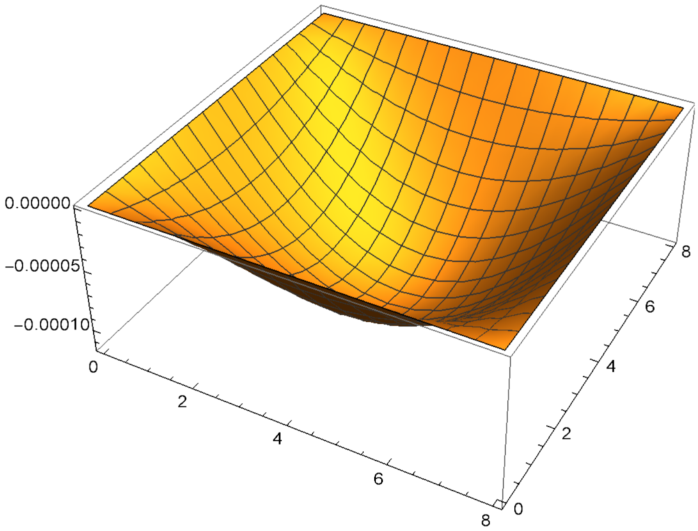
```
          h² π² - (b⁴ d11 d66 + 625 a⁴ d22 d66 - 25 a² b² (d12² - d11 d22 + 2 d12 d66)) h⁴ π⁴)
       Sin[(π x) / a] × Sin[(5 π y) / b]) / (5 a0 h³ π⁶
       (12 a² a0 b² d44 d55 (b⁴ d11 + 625 a⁴ d22 + 50 a² b² (d12 + 2 d66)) + (25 a² d44 + b² d55)
          (b⁴ d11 d66 + 625 a⁴ d22 d66 - 25 a² b² (d12² - d11 d22 + 2 d12 d66)) h² π²)) + (16 a² b² p
       (-144 a⁴ a0² b⁴ d44 d55 - 12 a² a0 b² (25 a² (d22 d55 + d44 d66) + 9 b² (d11 d44 + d55 d66))
          h² π² + (-81 b⁴ d11 d66 - 625 a⁴ d22 d66 + 225 a² b² (d12² - d11 d22 + 2 d12 d66)) h⁴ π⁴)
       Sin[(3 π x) / a] × Sin[(5 π y) / b]) / (15 a0 h³ π⁶
       (12 a² a0 b² d44 d55 (81 b⁴ d11 + 625 a⁴ d22 + 450 a² b² (d12 + 2 d66)) + (25 a² d44 + 9 b² d55)
          (81 b⁴ d11 d66 + 625 a⁴ d22 d66 - 225 a² b² (d12² - d11 d22 + 2 d12 d66)) h² π²)) +
    (16 a² b² p (-144 a⁴ a0² b⁴ d44 d55 - 300 a² a0 b² (a² (d22 d55 + d44 d66) + b² (d11 d44 + d55 d66))
          h² π² - 625 (b⁴ d11 d66 + a⁴ d22 d66 - a² b² (d12² - d11 d22 + 2 d12 d66)) h⁴ π⁴)
       Sin[(5 π x) / a] × Sin[(5 π y) / b]) / (15 625 a0 h³ π⁶
       (12 a² a0 b² d44 d55 (b⁴ d11 + a⁴ d22 + 2 a² b² (d12 + 2 d66)) +
         25 (a² d44 + b² d55) (b⁴ d11 d66 + a⁴ d22 d66 - a² b² (d12² - d11 d22 + 2 d12 d66)) h² π²)) +
    (16 a² b² p (-144 a⁴ a0² b⁴ d44 d55 - 12 a² a0 b² (25 a² (d22 d55 + d44 d66) +
             49 b² (d11 d44 + d55 d66)) h² π² + (-2401 b⁴ d11 d66 - 625 a⁴ d22 d66 +
             1225 a² b² (d12² - d11 d22 + 2 d12 d66)) h⁴ π⁴) Sin[(7 π x) / a] × Sin[(5 π y) / b]) /
     (35 a0 h³ π⁶ (12 a² a0 b² d44 d55 (2401 b⁴ d11 + 625 a⁴ d22 + 2450 a² b² (d12 + 2 d66)) +
          (25 a² d44 + 49 b² d55) (2401 b⁴ d11 d66 + 625 a⁴ d22 d66 -
             1225 a² b² (d12² - d11 d22 + 2 d12 d66)) h² π²)) + (16 a² b² p
       (-144 a⁴ a0² b⁴ d44 d55 - 12 a² a0 b² (49 a² (d22 d55 + d44 d66) + b² (d11 d44 + d55 d66))
          h² π² - (b⁴ d11 d66 + 2401 a⁴ d22 d66 - 49 a² b² (d12² - d11 d22 + 2 d12 d66)) h⁴ π⁴)
       Sin[(π x) / a] × Sin[(7 π y) / b]) / (7 a0 h³ π⁶
       (12 a² a0 b² d44 d55 (b⁴ d11 + 2401 a⁴ d22 + 98 a² b² (d12 + 2 d66)) + (49 a² d44 + b² d55)
          (b⁴ d11 d66 + 2401 a⁴ d22 d66 - 49 a² b² (d12² - d11 d22 + 2 d12 d66)) h² π²)) + (16 a² b² p
       (-144 a⁴ a0² b⁴ d44 d55 - 12 a² a0 b² (49 a² (d22 d55 + d44 d66) + 9 b² (d11 d44 + d55 d66))
          h² π² + (-81 b⁴ d11 d66 - 2401 a⁴ d22 d66 + 441 a² b² (d12² - d11 d22 + 2 d12 d66)) h⁴ π⁴)
       Sin[(3 π x) / a] × Sin[(7 π y) / b]) / (21 a0 h³ π⁶
       (12 a² a0 b² d44 d55 (81 b⁴ d11 + 2401 a⁴ d22 + 882 a² b² (d12 + 2 d66)) + (49 a² d44 + 9 b² d55)
          (81 b⁴ d11 d66 + 2401 a⁴ d22 d66 - 441 a² b² (d12² - d11 d22 + 2 d12 d66)) h² π²)) +
    (16 a² b² p (-625 b⁴ d11 d66 h⁴ π⁴ - a⁴ (12 a0 b² d44 + 49 d22 h² π²) (12 a0 b² d55 + 49 d66 h² π²) +
          25 a² b² h² π² (-12 a0 b² (d11 d44 + d55 d66) + 49 (d12² - d11 d22 + 2 d12 d66) h² π²))
       Sin[(5 π x) / a] × Sin[(7 π y) / b]) / (35 a0 h³ π⁶ (12 a² a0 b² d44 d55
          (625 b⁴ d11 + 2401 a⁴ d22 + 2450 a² b² (d12 + 2 d66)) + (49 a² d44 + 25 b² d55)
          (625 b⁴ d11 d66 + 2401 a⁴ d22 d66 - 1225 a² b² (d12² - d11 d22 + 2 d12 d66)) h² π²)) +
    (16 a² b² p (-144 a⁴ a0² b⁴ d44 d55 - 588 a² a0 b² (a² (d22 d55 + d44 d66) + b² (d11 d44 + d55 d66))
          h² π² - 2401 (b⁴ d11 d66 + a⁴ d22 d66 - a² b² (d12² - d11 d22 + 2 d12 d66)) h⁴ π⁴)
       Sin[(7 π x) / a] × Sin[(7 π y) / b]) / (117 649 a0 h³ π⁶
       (12 a² a0 b² d44 d55 (b⁴ d11 + a⁴ d22 + 2 a² b² (d12 + 2 d66)) +
         49 (a² d44 + b² d55) (b⁴ d11 d66 + a⁴ d22 d66 - a² b² (d12² - d11 d22 + 2 d12 d66)) h² π²))
w[a / 2, b / 2] * 1000 // FullSimplify
w2[x_, y_] = (16 a² b² p
      (-144 a⁴ a0² b⁴ d44 d55 - 12 a² a0 b² (a² (d22 d55 + d44 d66) + b² (d11 d44 + d55 d66)) h² π² -
         (b⁴ d11 d66 + a⁴ d22 d66 - a² b² (d12² - d11 d22 + 2 d12 d66)) h⁴ π⁴) Sin[(π x) / a] ×
       Sin[(π y) / b]) / (a0 h³ π⁶ (12 a² a0 b² d44 d55 (b⁴ d11 + a⁴ d22 + 2 a² b² (d12 + 2 d66)) +
         (a² d44 + b² d55) (b⁴ d11 d66 + a⁴ d22 d66 - a² b² (d12² - d11 d22 + 2 d12 d66)) h² π²));
w2[a / 2, b / 2] * 1000 // FullSimplify
```

Out[∘]= -0.115776

Out[∘]= -0.121147

In[∘]:=
```
Plot3D[{w[x, y]}, {x, 0, 8}, {y, 0, 8}]
```

Out[∘]=



In[∘]:=
```
(*pasmo - dane*)
h = 1;
a = 8;
f3 = 1.5;
(*pasmo - ugięcie*)
```

$$wmax = \left(\frac{a^2\, f3\, \left(-\frac{5\, a^2}{d11} - \frac{4\, h^2}{a0\, d55}\right)}{32\, h^3}\right) * 1000$$

Out[∘]= -1.00305

In[•]:=
```
ClearAll["Global`*"]

ii = 1;
wcoef = Table[0, {(1 + ii) / 2}];
wsol = 0;

dx[f_] := D[f, {x, 1}]
dy[f_] := D[f, {y, 1}]
dx2[f_] := D[f, {x, 2}]
dy2[f_] := D[f, {y, 2}]
dxy[f_] := D[D[f, y], x]
L1[f_] := d11 * dx2[f] + d66 / 2 * dy2[f]
L2[f_] := d66 / 2 * dx2[f] + d22 * dy2[f]
L3[f_] := d55 / 2 * dx2[f] + d44 / 2 * dy2[f]
L4[f_] := (d12 + d66 / 2) * dxy[f]
L5[f_] := d55 / 2 * dx[f]
L6[f_] := d44 / 2 * dy[f]

N11[x_, y_] :=
  h0 * d11 * γ11[x, y] + h0 * d12 * γ22[x, y] + h1 * d11 * κ11[x, y] + h1 * d12 * κ22[x, y];
N22[x_, y_] := h0 * d12 * γ11[x, y] + h0 * d22 * γ22[x, y] +
   h1 * d12 * κ11[x, y] + h1 * d22 * κ22[x, y];
N12[x_, y_] := h0 * d66 * (γ12[x, y] + γ21[x, y]) + h1 * d66 * (κ12[x, y] + κ12[x, y]);
N13[x_, y_] := a0 * h0 * d55 * γ13[x, y] + a1 * h1 * d55 * κ13[x, y];
N23[x_, y_] := a0 * h0 * d44 * γ23[x, y] + a1 * h1 * d22 * κ23[x, y];

M11[x_, y_] :=
  h1 * d11 * γ11[x, y] + h1 * d12 * γ22[x, y] + h2 * d11 * κ11[x, y] + h2 * d12 * κ22[x, y];
M22[x_, y_] := h1 * d12 * γ11[x, y] + h1 * d22 * γ22[x, y] +
   h2 * d12 * κ11[x, y] + h2 * d22 * κ22[x, y];
M12[x_, y_] := h1 * d66 * (γ12[x, y] + γ21[x, y]) + h2 * d66 * (κ12[x, y] + κ12[x, y]);
M13[x_, y_] := a1 * h1 * d55 * γ13[x, y] + a2 * h2 * d55 * κ13[x, y];
M23[x_, y_] := a1 * h1 * d44 * γ23[x, y] + a2 * h2 * d22 * κ23[x, y];

γ11[x_, y_] := D[u1[x, y], x];
γ22[x_, y_] := D[u2[x, y], y];
γ12[x_, y_] := D[u1[x, y], y] - psi[x, y];
γ21[x_, y_] := D[u2[x, y], x] + psi[x, y];
κ11[x_, y_] := D[fi1[x, y], x];
κ22[x_, y_] := D[fi2[x, y], y];
κ12[x_, y_] := D[fi1[x, y], y];
κ21[x_, y_] := D[fi2[x, y], x];
γ13[x_, y_] := fi1[x, y] + D[w[x, y], x];
γ23[x_, y_] := fi2[x, y] + D[w[x, y], y];
κ13[x_, y_] := D[psi[x, y], x];
κ23[x_, y_] := D[psi[x, y], y];
γ33[x_, y_] := psi[x, y];


Do[Do[
   u1[x_, y_, i_, j_] := u1max * Cos[pi * i * x / a] * Sin[pi * j * y / b];
   u2[x_, y_, i_, j_] := u2max * Sin[pi * i * x / a] * Cos[pi * j * y / b];
   psi[x_, y_, i_, j_] := psimax * Sin[pi * i * x / a] * Sin[pi * j * y / b];
   fi1[x_, y_, i_, j_] := fi1max * Cos[pi * i * x / a] * Sin[pi * j * y / b];
```

```
fi2[x_, y_, i_, j_] := fi2max * Sin[pi * i * x / a] * Cos[pi * j * y / b];
w[x_, y_, i_, j_] := wmax * Sin[pi * i * x / a] * Sin[pi * j * y / b];

f1[x_, y_, i_, j_] := 0;
f2[x_, y_, i_, j_] := 0;
m3[x_, y_, i_, j_] := 0;
m1[x_, y_, i_, j_] := 0;
m2[x_, y_, i_, j_] := 0;
f3[x_, y_, i_, j_] := p * Sin[Pi * i * x / a] * Sin[Pi * j * y / b];
Print[f3[x, y, i, j]];

F1[x_, y_, i_, j_] := h0 * L1[u1[x, y, i, j]] + h0 * L4[u2[x, y, i, j]] +
  0 + h1 * L1[fi1[x, y, i, j]] + h1 * L4[fi2[x, y, i, j]] + 0;
F2[x_, y_, i_, j_] := h0 * L4[u1[x, y, i, j]] + h0 * L2[u2[x, y, i, j]] +
  0 + h1 * L4[fi1[x, y, i, j]] + h1 * L2[fi2[x, y, i, j]] + 0;
F3[x_, y_, i_, j_] := 0 + 0 + a2 * h2 * L3[psi[x, y, i, j]] + a1 * h1 * L5[fi1[x, y, i, j]] +
  a1 * h1 * L6[fi2[x, y, i, j]] + a1 * h1 * L3[w[x, y, i, j]];
F4[x_, y_, i_, j_] := h1 * L1[u1[x, y, i, j]] + h1 * L4[u2[x, y, i, j]] -
  a1 * h1 * L5[psi[x, y, i, j]] + h2 * L1[fi1[x, y, i, j]] -
  a0 * h0 * d55 * fi1[x, y, i, j] + h2 * L4[fi2[x, y, i, j]] - a0 * h0 * L5[w[x, y, i, j]];
F5[x_, y_, i_, j_] := h1 * L4[u1[x, y, i, j]] + h1 * L2[u2[x, y, i, j]] -
  a1 * h1 * L6[psi[x, y, i, j]] + h2 * L4[fi1[x, y, i, j]] + h2 * L2[fi2[x, y, i, j]] -
  a0 * h0 * d44 * fi2[x, y, i, j] - a0 * h0 * L6[w[x, y, i, j]];
F6[x_, y_, i_, j_] := 0 + 0 + a1 * h1 * L3[psi[x, y, i, j]] + a0 * h0 * L5[fi1[x, y, i, j]] +
  a0 * h0 * L6[fi2[x, y, i, j]] + a0 * h0 * L3[w[x, y, i, j]];

(*a0=5/6;
a2=7/10;
a1=8/10;*)

h0 = h;
h1 = 0;
h2 = h^3 / 12;

(*h0=h;
h1=h^2/3;
h2=h^3/3;*)

pi = Pi;

eqns = {F1[x, y, i, j] == f1[x, y, i, j], F2[x, y, i, j] == f2[x, y, i, j],
  F3[x, y, i, j] == m3[x, y, i, j], F4[x, y, i, j] == m1[x, y, i, j],
  F5[x, y, i, j] == m2[x, y, i, j], F6[x, y, i, j] == f3[x, y, i, j]};
vars = {fi1max, fi2max, psimax, u1max, u2max, wmax};
s = Solve[eqns, vars] // FullSimplify;
Print[s];
ww = s[[All, 6, 2]][[1]];
wcoef[[(1 + i) / 2]] = ww;
wsol += ww * Sin[pi * i * x / a] * Sin[pi * j * y / b];
, {i, 1, ii, 2}], {j, 1, ii, 2}];
wcoef;
wsol
```

$$p \operatorname{Sin}\left[\frac{\pi x}{a}\right] \times \operatorname{Sin}\left[\frac{\pi y}{b}\right]$$

$$\Big\{\Big\{\mathrm{fi1max}\to\big(288\,a^5\,a0\,b^6\,d44\,d55\,p-12\,a^3\,b^4\,\big(-b^2\,d55\,d66+a^2\,(2\,d12\,d44-2\,d22\,d55+d44\,d66)\big)\,h^2\,p\,\pi^2\big)\Big/\big(144\,a^4\,a0^2\,b^4\,d44\,d55\,\big(a^2\,d44+b^2\,d55\big)\,h\,\pi+6\,a^2\,a0\,b^2\,\big(a^4\,d44\,(4\,d22\,d55+d44\,d66)+b^4\,d55\,(4\,d11\,d44+d55\,d66)+2\,a^2\,b^2\,\big(d11\,d44^2+d55\,(2\,d12\,d44+d22\,d55+3\,d44\,d66)\big)\big)\,h^3\,\pi^3+\big(a^2\,d44+b^2\,d55\big)\,\big(b^4\,d11\,d66+a^4\,d22\,d66-2\,a^2\,b^2\,(-d11\,d22+d12\,(d12+d66))\big)\,h^5\,\pi^5\big),$$

$$\mathrm{fi2max}\to\big(12\,a^4\,b^3\,p\,\big(24\,a^2\,a0\,b^2\,d44\,d55+\big(a^2\,d44\,d66+b^2\,(2\,d11\,d44-d55\,(2\,d12+d66))\big)\,h^2\,\pi^2\big)\big)\Big/\big(144\,a^4\,a0^2\,b^4\,d44\,d55\,\big(a^2\,d44+b^2\,d55\big)\,h\,\pi+6\,a^2\,a0\,b^2\,\big(a^4\,d44\,(4\,d22\,d55+d44\,d66)+b^4\,d55\,(4\,d11\,d44+d55\,d66)+2\,a^2\,b^2\,\big(d11\,d44^2+d55\,(2\,d12\,d44+d22\,d55+3\,d44\,d66)\big)\big)\,h^3\,\pi^3+\big(a^2\,d44+b^2\,d55\big)\,\big(b^4\,d11\,d66+a^4\,d22\,d66-2\,a^2\,b^2\,(-d11\,d22+d12\,(d12+d66))\big)\,h^5\,\pi^5\big),$$

$$\mathrm{psimax}\to 0,\ \mathrm{u1max}\to 0,\ \mathrm{u2max}\to 0,\ \mathrm{wmax}\to -\Big(\big(2\,a^2\,b^2\,p\,\big(288\,a^4\,a0^2\,b^4\,d44\,d55+12\,a^2\,a0\,b^2\,\big(a^2\,(2\,d22\,d55+d44\,d66)+b^2\,(2\,d11\,d44+d55\,d66)\big)\,h^2\,\pi^2+\big(b^4\,d11\,d66+a^4\,d22\,d66-2\,a^2\,b^2\,(-d11\,d22+d12\,(d12+d66))\big)\,h^4\,\pi^4\big)\big)\Big/\Big(a0\,h\,\pi^2\,\big(144\,a^4\,a0^2\,b^4\,d44\,d55\,\big(a^2\,d44+b^2\,d55\big)+6\,a^2\,a0\,b^2\,\big(a^4\,d44\,(4\,d22\,d55+d44\,d66)+b^4\,d55\,(4\,d11\,d44+d55\,d66)+2\,a^2\,b^2\,\big(d11\,d44^2+d55\,(2\,d12\,d44+d22\,d55+3\,d44\,d66)\big)\big)\,h^2\,\pi^2+\big(a^2\,d44+b^2\,d55\big)\,\big(b^4\,d11\,d66+a^4\,d22\,d66-2\,a^2\,b^2\,(-d11\,d22+d12\,(d12+d66))\big)\,h^4\,\pi^4\big)\Big)\Big\}\Big\}$$

Out[ ]=

$$-\Big(\Big(2\,a^2\,b^2\,p\,\big(288\,a^4\,a0^2\,b^4\,d44\,d55+12\,a^2\,a0\,b^2\,\big(a^2\,(2\,d22\,d55+d44\,d66)+b^2\,(2\,d11\,d44+d55\,d66)\big)\,h^2\,\pi^2+\big(b^4\,d11\,d66+a^4\,d22\,d66-2\,a^2\,b^2\,(-d11\,d22+d12\,(d12+d66))\big)\,h^4\,\pi^4\big)\,\mathrm{Sin}\Big[\frac{\pi\,x}{a}\Big]\times\mathrm{Sin}\Big[\frac{\pi\,y}{b}\Big]\Big)\Big/\Big(a0\,h\,\pi^2\,\big(144\,a^4\,a0^2\,b^4\,d44\,d55\,\big(a^2\,d44+b^2\,d55\big)+6\,a^2\,a0\,b^2\,\big(a^4\,d44\,(4\,d22\,d55+d44\,d66)+b^4\,d55\,(4\,d11\,d44+d55\,d66)+2\,a^2\,b^2\,\big(d11\,d44^2+d55\,(2\,d12\,d44+d22\,d55+3\,d44\,d66)\big)\big)\,h^2\,\pi^2+\big(a^2\,d44+b^2\,d55\big)\,\big(b^4\,d11\,d66+a^4\,d22\,d66-2\,a^2\,b^2\,(-d11\,d22+d12\,(d12+d66))\big)\,h^4\,\pi^4\big)\Big)\Big)$$

In[•]:=
```
ClearAll["Global`*"]

dx[f_] := D[f, {x, 1}]
dx2[f_] := D[f, {x, 2}]

N11[x_] = h0 * d11 * γ11[x] + h1 * d11 * κ11[x];
N13[x_] = a0 * h0 * d55 * γ13[x] + a1 * h1 * d55 * κ13[x];

M11[x_] = h1 * d11 * γ11[x] + h2 * d11 * κ11[x];
M13[x_] = a1 * h1 * d55 * γ13[x] + a2 * h2 * d55 * κ13[x];

γ11[x_] = D[u1[x], x];
κ11[x_] = D[fi1[x], x];
γ13[x_] = fi1[x] + D[w[x], x];
κ13[x_] = D[psi[x], x];
γ33[x_] = psi[x];

f1[x_] = f1;
m3[x_] = m3;
m1[x_] = m1;
f3[x_] = f3;

F1[x_] = A0 * dx2[u1[x]] + A1 * dx2[fi1[x]];
F2[x_] = B2 * dx2[psi[x]] + a * B1 * dx[fi1[x]] + B1 * dx2[w[x]];
F3[x_] = A1 * dx2[u1[x]] - a * B1 * dx[psi[x]] +
   A2 * dx2[fi1[x]] - B0 * a^2 * fi1[x] - a * B0 * dx[w[x]];
F4[x_] = B1 * dx2[psi[x]] + a * B0 * dx[fi1[x]] + B0 * dx2[w[x]];


(*h0=h;
h1=0;
h2=h^3/12;*)

(*h0=h;
h1=h^2/3;
h2=h^3/3;*)

eqns = {F1[x] == -a^2 * f1[x],
   F2[x] == -a^2 * m3[x], F3[x] == -a^2 * m1[x], F4[x] == -a^2 * f3[x]};
eq = {w[x], fi1[x], u1[x], psi[x]};
soln = DSolve[eqns, eq, x] // Simplify
```

Out[ ]=
$$\left\{\left\{\text{fi1}[x]\to\frac{1}{-6\,\text{A1}^2+6\,\text{A0}\,\text{A2}}\left(-a^3\,\text{A0}\,\text{f3}\,x^3+3\,a^2\,x^2\left(\text{A1}\,\text{f1}-\text{A0}\,\text{m1}+\text{A0}\,\text{B0}\,\mathbb{c}_1\right)-6\left(\text{A1}^2-\text{A0}\,\text{A2}\right)\left(\mathbb{c}_1+x\,\mathbb{c}_2\right)+3\,a\,\text{A0}\,x^2\left(\text{B1}\,\mathbb{c}_4+\text{B0}\,\mathbb{c}_8\right)\right),\right.\right.$$
$$\text{psi}[x]\to\frac{a^2\left(\text{B1}\,\text{f3}-\text{B0}\,\text{m3}\right)x^2-2\left(\text{B1}^2-\text{B0}\,\text{B2}\right)\left(\mathbb{c}_3+x\,\mathbb{c}_4\right)}{-2\,\text{B1}^2+2\,\text{B0}\,\text{B2}},$$
$$\text{u1}[x]\to\frac{1}{-6\,\text{A1}^2+6\,\text{A0}\,\text{A2}}\left(a^3\,\text{A1}\,\text{f3}\,x^3-3\,a^2\,x^2\left(\text{A2}\,\text{f1}-\text{A1}\,\text{m1}+\text{A1}\,\text{B0}\,\mathbb{c}_1\right)-6\left(\text{A1}^2-\text{A0}\,\text{A2}\right)\left(\mathbb{c}_5+x\,\mathbb{c}_6\right)-3\,a\,\text{A1}\,x^2\left(\text{B1}\,\mathbb{c}_4+\text{B0}\,\mathbb{c}_8\right)\right),$$
$$w[x]\to\frac{a^4\,\text{A0}\,\text{f3}\,x^4}{24\left(-\text{A1}^2+\text{A0}\,\text{A2}\right)}+\frac{a^3\,x^3\left(\text{A1}\,\text{f1}-\text{A0}\,\text{m1}+\text{A0}\,\text{B0}\,\mathbb{c}_1\right)}{6\left(\text{A1}^2-\text{A0}\,\text{A2}\right)}-\frac{1}{2}\,a\,x^2\,\mathbb{c}_2+\mathbb{c}_7+x\,\mathbb{c}_8+$$
$$\left.\left.\frac{a^2\,x^2\left(3\,\text{A1}^2\left(\text{B2}\,\text{f3}-\text{B1}\,\text{m3}\right)+\text{A0}\,\text{A2}\left(-3\,\text{B2}\,\text{f3}+3\,\text{B1}\,\text{m3}\right)+\text{A0}\left(\text{B1}^2-\text{B0}\,\text{B2}\right)x\left(\text{B1}\,\mathbb{c}_4+\text{B0}\,\mathbb{c}_8\right)\right)}{6\left(\text{A1}^2-\text{A0}\,\text{A2}\right)\left(\text{B1}^2-\text{B0}\,\text{B2}\right)}\right\}\right\}$$

In[ ]:=
```
ϕ1[x_] = Collect[fi1[x] /. soln[[1, 1]], x]
ψ[x_] = Collect[psi[x] /. soln[[1, 2]], x]
uu1[x_] = Collect[u1[x] /. soln[[1, 3]], x]
ww1[x_] = Collect[w[x] /. soln[[1, 4]], x]
```

Out[ ]=
$$-\frac{a^3\,\text{A0}\,\text{f3}\,x^3}{-6\,\text{A1}^2+6\,\text{A0}\,\text{A2}}-\frac{6\left(\text{A1}^2-\text{A0}\,\text{A2}\right)\mathbb{c}_1}{-6\,\text{A1}^2+6\,\text{A0}\,\text{A2}}-\frac{6\left(\text{A1}^2-\text{A0}\,\text{A2}\right)x\,\mathbb{c}_2}{-6\,\text{A1}^2+6\,\text{A0}\,\text{A2}}+\frac{x^2\left(3\,a^2\left(\text{A1}\,\text{f1}-\text{A0}\,\text{m1}+\text{A0}\,\text{B0}\,\mathbb{c}_1\right)+3\,a\,\text{A0}\left(\text{B1}\,\mathbb{c}_4+\text{B0}\,\mathbb{c}_8\right)\right)}{-6\,\text{A1}^2+6\,\text{A0}\,\text{A2}}$$

Out[ ]=
$$\frac{a^2\left(\text{B1}\,\text{f3}-\text{B0}\,\text{m3}\right)x^2}{-2\,\text{B1}^2+2\,\text{B0}\,\text{B2}}-\frac{2\left(\text{B1}^2-\text{B0}\,\text{B2}\right)\mathbb{c}_3}{-2\,\text{B1}^2+2\,\text{B0}\,\text{B2}}-\frac{2\left(\text{B1}^2-\text{B0}\,\text{B2}\right)x\,\mathbb{c}_4}{-2\,\text{B1}^2+2\,\text{B0}\,\text{B2}}$$

Out[ ]=
$$\frac{a^3\,\text{A1}\,\text{f3}\,x^3}{-6\,\text{A1}^2+6\,\text{A0}\,\text{A2}}-\frac{6\left(\text{A1}^2-\text{A0}\,\text{A2}\right)\mathbb{c}_5}{-6\,\text{A1}^2+6\,\text{A0}\,\text{A2}}-\frac{6\left(\text{A1}^2-\text{A0}\,\text{A2}\right)x\,\mathbb{c}_6}{-6\,\text{A1}^2+6\,\text{A0}\,\text{A2}}+\frac{x^2\left(-3\,a^2\left(\text{A2}\,\text{f1}-\text{A1}\,\text{m1}+\text{A1}\,\text{B0}\,\mathbb{c}_1\right)-3\,a\,\text{A1}\left(\text{B1}\,\mathbb{c}_4+\text{B0}\,\mathbb{c}_8\right)\right)}{-6\,\text{A1}^2+6\,\text{A0}\,\text{A2}}$$

Out[ ]=
$$\frac{a^4\,\text{A0}\,\text{f3}\,x^4}{24\left(-\text{A1}^2+\text{A0}\,\text{A2}\right)}+x^2\left(\frac{a^2\,\text{A1}^2\left(\text{B2}\,\text{f3}-\text{B1}\,\text{m3}\right)}{2\left(\text{A1}^2-\text{A0}\,\text{A2}\right)\left(\text{B1}^2-\text{B0}\,\text{B2}\right)}+\frac{a^2\,\text{A0}\,\text{A2}\left(-3\,\text{B2}\,\text{f3}+3\,\text{B1}\,\text{m3}\right)}{6\left(\text{A1}^2-\text{A0}\,\text{A2}\right)\left(\text{B1}^2-\text{B0}\,\text{B2}\right)}-\frac{a\,\mathbb{c}_2}{2}\right)+$$
$$\mathbb{c}_7+x\,\mathbb{c}_8+x^3\left(\frac{a^3\left(\text{A1}\,\text{f1}-\text{A0}\,\text{m1}+\text{A0}\,\text{B0}\,\mathbb{c}_1\right)}{6\left(\text{A1}^2-\text{A0}\,\text{A2}\right)}+\frac{a^2\,\text{A0}\left(\text{B1}\,\mathbb{c}_4+\text{B0}\,\mathbb{c}_8\right)}{6\left(\text{A1}^2-\text{A0}\,\text{A2}\right)}\right)$$